COLLECTION QUEYSANNE-REVUZ

MATHEMATIQUE

Tome 1

1e CDE

FERNAND NATHAN

NOUVELLE COLLECTION DIRIGÉE

PAR

MICHEL QUEYSANNE
Ancien élève de l'E.N.S.
Maître assistant à la Faculté des Sciences de Paris

ANDRÉ REVUZ
Ancien élève de l'E.N.S.
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

MATHEMATIQUE

par

MICHÈLE DEBRAY
Professeur agrégé au Lycée Albert Camus

et

MARC GOURION
Professeur agrégé au Lycée Henri IV

1re CDE

tome 1

FERNAND NATHAN EDITEUR
18, rue Monsieur-le-Prince, PARIS VI

A la même Librairie

NOUVELLE COLLECTION QUEYSANNE REVUZ

- **MATHÉMATIQUE** classe de 6e
- **TRAVAUX DIRIGÉS** classe de 6e
- **MATHÉMATIQUE** classe de 5e
- **TRAVAUX DIRIGÉS** classe de 5e
- **MATHÉMATIQUE** classe de 4e
- **TRAVAUX DIRIGÉS** classe de 4e
- **MATHÉMATIQUE** classe de 2e A
- **MATHÉMATIQUE** classes de 2e C T
  Tome 1
  Tome 2
- **MATHÉMATIQUE** classe de 1re A B
  Tome 1
  Tome 2
- **MATHÉMATIQUE** classes de 1re C D E
  Tome 1
  Tome 2
- **MATHÉMATIQUE** classe terminale A
- **MATHÉMATIQUE** classe terminale B
- **MATHÉMATIQUE** classes terminales C D E
  Tome 1
  Tome 2
  Tome 3

COLLECTION QUEYSANNE REVUZ

- (Programme 1963) **MATHÉMATIQUES** classe de 3e

PITEL, DURANT, TOUYAROT

- **L'HEURE DE MATHÉMATIQUE EN TERMINALE LITTÉRAIRE classes Terminales A1, A2, A5**

Avant-propos

Ce manuel conforme aux nouveaux programmes de Mathématique pour les classes de Première est destiné aux élèves des sections C, D et E. Les développements qui n'appartiennent pas au programme de la section D sont clairement indiqués, ainsi que ceux qui ne concernent que les élèves de la section E.
Cet ouvrage a été par commodité présenté en deux tomes; le tome 1 correspond aux paragraphes I, II, III du programme, le tome 2 aux paragraphes IV à VII.

Dans ce premier tome on reprend d'abord (chap. 1 à 3) les notions fondamentales étudiées en Seconde avec les compléments propres au programme de Première.
Dans le chapitre 4 on initie les élèves à la notion de continuité puis à celle de limite. Cette initiation est faite en étudiant de nombreux exemples qui permettent ensuite de formuler clairement les situations rencontrées. Le chapitre 5 est consacré à la définition et au calcul des dérivées. Enfin l'étude des fonctions numériques et de leurs variations peut être entreprise dans les chapitres 6 à 8. Cette étude est l'occasion de résoudre ou de discuter de nombreuses équations ou inéquations.
D'autre part l'étude des dérivées, de la fonction affine et de la fonction polynôme du deuxième degré permet de présenter les notions de cinématique du programme.
Le chapitre 9 est consacré à des compléments sur les équations et inéquations. Enfin le chapitre 10 rassemble les notions indispensables de calcul numérique.

Quelques développements, imprimés en petits caractères, présentent, le plus souvent sous forme d'exercices résolus, des compléments au cours. Ils sont, en principe, réservés aux meilleurs élèves: naturellement les Professeurs sont seuls juges de l'utilisation de ces compléments au mieux de l'intérêt de leurs élèves.
De très nombreux exercices présentés dans la suite du cours et à la fin des chapitres ont un double but : d'une part, permettre aux élèves d'assimiler l'introduction à l'Analyse, et d'autre part leur faire acquérir des techniques de calcul.

Nous espérons que ce cours, rédigé par Mlle DEBRAY *et M.* GOURION, *qui enseignent depuis plusieurs années dans les classes du Second Cycle, rendra de grands services aux Professeurs et à leurs élèves.*

M.Q. et A.R.

1|

Ensemble des parties d'un ensemble

Nous avons rappelé succinctement les principaux résultats de logique étudiés en classe de seconde.
Ces rappels nous permettent de mettre en évidence les liens étroits qui existent entre les lois logiques *et les opérations sur les* parties d'un ensemble.

---

1. 1 LOIS LOGIQUES

a) Assertions.

Une **assertion** est un énoncé pour lequel on peut répondre sans ambiguïté et sans renseignement complémentaire à la question : « Est-il vrai ou bien est-il faux? »

EXEMPLES

1. « $1 \leqslant 2$ » est une assertion vraie; « $5 \leqslant 3$ » est une assertion fausse.
2. La lettre x désignant un nombre réel, « $x \leqslant 2$ » n'est pas une assertion; cet énoncé devient une assertion si l'on précise la valeur de x.
3. « Tous les nombres réels négatifs sont inférieurs à 2 » est une assertion vraie.
4. « Il existe au moins un nombre premier pair » est une assertion vraie.

b) Connecteurs logiques.

A toute assertion p on peut associer l'assertion (non p) appelée négation de p, vraie lorsque p est fausse et fausse lorsque p est vraie; **non** est un *connecteur logique à une place*.
Avec deux assertions p, q on peut en construire d'autres à l'aide de *connecteurs logiques à deux places*.
Si $*$ désigne un connecteur logique à deux places, les valeurs de vérité de $p * q$ sont données suivant celles de p et de q par la table de vérité du connecteur $*$. Les colonnes 3 à 6 du tableau suivant donne les valeurs de vérité des connecteurs usuels :

p et q conjonction,
p ou q disjonction,
$p \Longrightarrow q$ implication,
$p \Longleftrightarrow q$ équivalence logique.

p	q	p et q	p ou q	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

REMARQUE

Le « **ou** » utilisé en logique et en mathématique a donc un sens *non exclusif*. L'assertion vraie si et seulement si une seule des assertions p, q est vraie est appelée **disjonction exclusive** de p, q; on la note « p ou bien q ».

L'implication ($q \Longrightarrow p$) est appelée **implication réciproque** de ($p \Longrightarrow q$).
L'implication (non $q \Longrightarrow$ non p) est appelée l'**implication contraposée** de ($p \Longrightarrow q$).

c) Lois logiques.

A l'aide d'une ou plusieurs assertions $p, q, r \ldots$ et des connecteurs logiques usuels on peut former de nouvelles assertions.
Les assertions suivantes ont la particularité d'être **vraies quelles que soient les valeurs de vérités de** $p, q, r \ldots$; on peut le constater en construisant leurs tables de vérité; elles sont appelées **lois logiques.**

1. [non (non p)] $\Longleftrightarrow$ p.
2. p ou (non p).
3. (p et q) $\Longleftrightarrow$ (q et p). (commutativité de la conjonction)
4. (p ou q) $\Longleftrightarrow$ (q ou p). (— de la disjonction)
5. [(p et q) et r] $\Longleftrightarrow$ [p et (q et r)]. (associativité de la conjonction)
6. [(p ou q) ou r] $\Longleftrightarrow$ [p ou (q ou r)]. (— de la disjonction)

Les deux membres de (5) et ceux de (6) s'écrivent respectivement
(p et q et r), (p ou q ou r).

7. ($p \Longrightarrow q$) $\Longleftrightarrow$ [(non p) ou q]. (propriété fondamentale de l'implication)
8. (non $q \Longrightarrow$ non p) $\Longleftrightarrow$ ($p \Longrightarrow q$).

Toute implication est équivalente à sa contraposée.

9. [($p \Longrightarrow q$) et ($q \Longrightarrow p$)] $\Longleftrightarrow$ ($p \Longleftrightarrow q$).
10. [($p \Longrightarrow q$) et ($q \Longrightarrow r$)] $\Longrightarrow$ ($p \Longrightarrow r$). (transitivité de l'implication)
11. [($p \Longleftrightarrow q$) et ($p \Longleftrightarrow r$)] $\Longrightarrow$ [($p \Longleftrightarrow r$)] (transitivité de l'équivalence)

Les premiers membres de ces deux implications 10 et 11 s'écrivent respectivement

$$(p \longrightarrow q \longrightarrow r), \quad (p \longleftrightarrow q \longleftrightarrow r).$$

12. $[p \text{ et } (q \text{ ou } r)] \longleftrightarrow [(p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r)]$.
13. $[p \text{ ou } (q \text{ et } r)] \longleftrightarrow [(p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou } r)]$.

La conjonction (resp. disjonction) est distributive par rapport à la disjonction (resp. conjonction).

14. $[\text{non } (p \text{ et } q)] \longleftrightarrow [(\text{non } p) \text{ ou } (\text{non } q)]$.
15. $[\text{non } (p \text{ ou } q)] \longleftrightarrow [(\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q)]$.

Ces deux équivalences sont appelées lois de MORGAN.

1. 2 FONCTION PROPOSITIONNELLE. PARTIE D'UN ENSEMBLE

a) Fonction propositionnelle définie sur un ensemble

Définition.

Étant donné un ensemble E, tout énoncé vrai pour certains éléments de E et faux pour tous les autres est appelé **fonction propositionnelle** définie sur E.

Au lieu de « *fonction propositionnelle définie sur* E » on dit aussi « *fonction propositionnelle concernant tout élément de* E ». A la place de fonction propositionnelle les logiciens emploient également le terme *prédicat*. Il nous arrivera de dire « *proposition* » à la place de « fonction propositionnelle » : c'est un abus de langage.

Une fonction propositionnelle définie sur E s'écrira $\mathcal{A}(x), \ldots, \mathcal{B}(x), \ldots, \mathcal{C}(x), \ldots$, x désignant un élément quelconque de E. Par exemple « x est un nombre premier » est une fonction propositionnelle définie sur $\mathbb{N}$; si nous l'écrivons $\mathcal{A}(x)$, la lettre $\mathcal{A}$ représente le groupe de mots « est un nombre premier », elle exprime une propriété vérifiée par certains éléments de E et non vérifiée par tous les autres.

Si dans $\mathcal{A}(x)$ on remplace la variable x par une lettre x_0 représentant un élément spécifié de E, on peut dire sans ambiguïté si l'énoncé $\mathcal{A}(x_0)$ est vrai ou bien faux, donc $\mathcal{A}(x_0)$ est une *assertion*. On dit que l'on a transformé la fonction propositionnelle considérée en assertion par **spécification de la variable.**

Par exemple si $\mathcal{A}(x)$ signifie « x est un nombre premier », $\mathcal{A}(2)$, $\mathcal{A}(7)$ sont des assertions vraies, $\mathcal{A}(1)$, $\mathcal{A}(4)$ sont des assertions fausses.

b) Partie d'un ensemble.

Définition.

On appelle **partie** ou **sous-ensemble** de E tout ensemble A dont tous les éléments appartiennent à E.

On écrit et on énonce indifféremment

$A \subset E$	$E \supset A$
« A est un sous-ensemble de E »	« E est un sur-ensemble de A »
« A est une partie de E »	« E inclut A »
« A est inclus dans E »	« E contient A ».

On rappelle que E est appelé *partie pleine* de E et l'ensemble vide $\varnothing$ *partie vide* de E; toute partie A de E telle que $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$ est appelée *partie propre* de E.

Soit $\mathcal{A}(x)$ une fonction propositionnelle définie sur E. Nous admettrons que tous les éléments x de E pour lesquels $\mathcal{A}(x)$ est vraie constituent un ensemble A. Tous les éléments de A appartiennent à E, A est une partie de E.

On écrira

$$A = \{x \in E \mid \mathcal{A}(x)\},$$

que l'on lit A est l'ensemble des x de E tels que $\mathcal{A}(x)$ soit vraie.

La lettre $\mathcal{A}$ représente un groupe de mots énonçant une propriété appartenant à tous les éléments de A et seulement à eux : nous dirons que $\mathcal{A}$ est une **propriété caractéristique** des éléments de A partie de E. Nous dirons aussi que $\mathcal{A}$ est une propriété définie sur E ou ayant un sens sur E.

c) Quantificateurs.

Étant donné un ensemble E et une fonction propositionnelle $\mathcal{A}(x)$ définie sur E, considérons les deux énoncés :

Tout élément de E possède la propriété $\mathcal{A}$,

il existe au moins un élément de E possédant la propriété $\mathcal{A}$;

pour chacun de ces deux énoncés on peut dire s'il est vrai ou s'il est faux, ce sont des assertions. On les écrit respectivement

(1) $(\forall x \in E)\ \mathcal{A}(x)$,

(2) $(\exists x \in E)\ \mathcal{A}(x)$.

Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont des **quantificateurs**; le quantificateur universel $\forall$ se lit « *quel que soit* » ou « *pour tout* », le quantificateur existentiel $\exists$ se lit « *il existe au moins un* » ou plus simplement « *il existe* ».

La lettre x qui figure dans les formules (1) et (2) pourrait être remplacée par une lettre quelconque non déjà utilisée dans la question étudiée par exemple

$$(\forall y \in E)\ \mathcal{A}(y), (\forall u \in E)\ \mathcal{A}(u) \ldots$$

sont des assertions équivalentes à l'assertion (1); de même

$$(\exists z \in E)\ \mathcal{A}(z), (\exists v \in E)\ \mathcal{A}(v) \ldots$$

sont des assertions équivalentes à (2).

Sous la première forme où nous avions donné les énoncés (1) et (2) il ne figurait pas de variable : Dans les énoncés (1) et (2) on dit que x est une *lettre muette*.

Donc lorsque l'on fait précéder une fonction propositionnelle $\mathcal{A}(x)$ définie sur E par $(\forall x \in E)$ ou bien par $(\exists x \in E)$, on transforme la fonction propositionnelle en assertion. Ce second procédé de transformation d'une fonction propositionnelle en assertion — le premier étant la spécification de la variable — est appelé **quantification de la variable.**

d) Lois logiques concernant les fonctions propositionnelles.

Les lois logiques concernant les assertions (cf § 1) sont des assertions vraies quelles que soient les valeurs de vérité des assertions $p, q, r \ldots$ qui y figurent. Si dans ces formules nous remplaçons $p, q, r \ldots$ respectivement par $\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x), \mathcal{C}(x) \ldots$ fonctions propositionnelles définies sur un même ensemble E, nous obtenons donc un *énoncé vrai quel que soit x de E*.

Les lois logiques concernant les assertions sont donc valables pour les fonctions propositionnelles $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$, $\mathcal{C}(x)$ . . . , définies sur E, quel que soit x de E. Par exemple

$$(\forall x \in E) \quad [[\mathcal{A}(x) \longrightarrow \mathcal{B}(x)] \longleftrightarrow [\text{non } \mathcal{B}(x) \longrightarrow \text{non } \mathcal{A}(x)]]$$

est une assertion vraie.

1. 3 ENSEMBLE DES PARTIES DE E

a) Ensemble $\mathcal{P}$ (E).

Nous admettrons que toutes les parties de E constituent un nouvel ensemble appelé **ensemble des parties** de E et noté $\mathcal{P}$ (E).

En particulier on a

$$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$$
$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\{a\}, \varnothing\}$$
$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \varnothing\}$$

EXERCICE

Former $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$, pour a, b, c tous distincts.

On a donc

$$(A \subset E) \longleftrightarrow [A \in \mathcal{P}(E)]$$

On se rappellera que pour tout x on a

$$(x \in E) \longleftrightarrow (\{x\} \subset E) \longleftrightarrow [\{x\} \in \mathcal{P}(E)].$$

b) Égalité de deux parties et équivalence logique.

Soient $\mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{B}(x)$ deux fonctions propositionnelles définies sur E et A et B les parties de E où elles sont respectivement vraies. On a

$$A = B \longleftrightarrow \{(\forall x \in E) [\mathcal{A}(x) \longleftrightarrow \mathcal{B}(x)]\}$$

Par conséquent deux propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ définies sur E peuvent être deux propriétés caractéristiques d'une même partie A de E, on dit alors que ce sont des *propriétés équivalentes* sur E.
En particulier quelle que soit la propriété caractéristique $\mathcal{A}$ de A partie de E on a

$$(\forall x \in E) \quad [\mathcal{A}(x) \longleftrightarrow (x \in A)].$$

c) Complémentaire d'une partie et négation.

Définition.

Étant donné un ensemble E et une partie A de E, on appelle **complémentaire de A dans E** l'ensemble de tous les éléments de E n'appartenant pas à A.

Le complémentaire de A dans E se note $\complement_E A$, on a

$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Si aucune confusion n'est à craindre, E restant le même dans une question, on peut, pour représenter le complémentaire de A, utiliser la notation $\overline{A}$.

Si $\mathcal{A}$ est une propriété caractéristique de A on a

$$\complement_E A = \{x \in E \mid \text{non } \mathcal{A}(x)\}.$$

La loi logique 1 (cf § 1. 1 c) permet d'écrire

$$(\forall x \in E) \; [\text{non } (\text{non } \mathcal{A}(x)) \longleftrightarrow \mathcal{A}(x)]$$

donc

$$\complement_E (\complement_E A) = A.$$

La relation entre A et $\complement_E A$ est donc symétrique, nous dirons que A et $\complement_E A$ sont *complémentaires dans* E.
On a en particulier

$$\complement_E \varnothing = E \quad \text{et} \quad \complement_E E = \varnothing.$$

Soit A une partie de E de propriété caractéristique $\mathcal{A}$; cherchons la négation de l'assertion

(1) $$(\forall x \in E) \; \mathcal{A}(x).$$

Nous savons que (1) signifie $A = E$; sa négation signifie donc $A \neq E$, ou encore $\complement_E A \neq \varnothing$, c'est-à-dire, il existe dans E des éléments x tels que non $\mathcal{A}(x)$ soit vraie d'où

$$\text{non } [(\forall x \in E) \; \mathcal{A}(x)] \longleftrightarrow [(\exists x \in E) \text{ non } \mathcal{A}(x)].$$

De même

(2) $$(\exists x \in E) \; \mathcal{A}(x)$$

signifie $A \neq \varnothing$; la négation de (2) signifie donc $A = \varnothing$ ou encore $\complement_E A = E$, c'est-à-dire « pour tout élément x de E non $\mathcal{A}(x)$ est vraie », d'où

$$\text{non } [(\exists x \in E) \; \mathcal{A}(x)] \longleftrightarrow [(\forall x \in E) \text{ non } \mathcal{A}(x)].$$

1. 4 RELATION D'INCLUSION DANS $\mathcal{P}$ (E)

a) Inclusion et implication.

Soient A et B deux parties de E, de propriétés caractéristiques respectives $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Nous nous proposons de trouver la disposition de A et B telle que l'on ait

$$(\forall x \in E) \quad [\mathcal{A}(x) \longrightarrow \mathcal{B}(x)]$$

Nous avons pour tout x de E

$$\mathcal{A}(x) \longleftrightarrow x \in A,$$
$$\mathcal{B}(x) \longleftrightarrow x \in B,$$

donc pour tout x de E

$$[\mathcal{A}(x) \longrightarrow \mathcal{B}(x)] \longleftrightarrow [x \in A \longrightarrow x \in B]$$

c'est-à-dire

$$(\forall x \in E) \quad [\mathcal{A}(x) \longrightarrow \mathcal{B}(x)] \longleftrightarrow A \subset B.$$

b) L'inclusion est une relation d'ordre dans $\mathcal{P}$ (E).

Considérons la relation $A \subset B$ définie dans $\mathcal{P}$ (E).
Pour tout x de E on a (cf § 1. 1 c, loi logique n° 9)

$$[(x \in A \longrightarrow x \in B) \text{ et } (x \in B \longrightarrow x \in A)] \longleftrightarrow [(x \in A) \longleftrightarrow (x \in B)],$$

c'est-à-dire $A = B$; donc quelles que soient les parties A et B de E on a

$$(A \subset B \text{ et } B \subset A) \longleftrightarrow (A = B).$$

La relation $A \subset B$ est donc *antisymétrique*; elle est donc *reflexive* (cf cours de seconde).
Pour tout x de E on a (cf § 1. 1 c, loi logique n° 10) on a

$$[(x \in A \Longrightarrow x \in B) \text{ et } (x \in B \Longrightarrow x \in C)] \Longrightarrow [(x \in A) \Longrightarrow (x \in C)].$$

Quelles que soient les parties A, B, C de E on a donc

$$[(A \subset B) \text{ et } (B \subset C)] \Longrightarrow (A \subset C).$$

La relation $A \subset B$ est donc *transitive*; étant antisymétrique (donc réflexive) et transitive c'est une relation d'ordre. La transitivité nous permet d'écrire $(A \subset B$ et $B \subset C)$ sous la forme

$$A \subset B \subset C.$$

Supposons que E contienne au moins deux éléments a et b; considérons les parties $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. A n'est pas inclus dans B et B n'est pas inclus dans A : la relation $A \subset B$ est donc une relation d'ordre partiel.

EXERCICE

1. Que peut-on dire de la relation d'inclusion si E comprend un seul élément?

Théorème.

La relation d'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre; si E comprend au moins *deux éléments* c'est une relation d'*ordre partiel*.

EXERCICE

2. Montrer que quelles que soient les parties A et B de E on a :

$$(A \subset B) \Longrightarrow (\complement_E A \supset \complement_E B)$$

1. 5 INTERSECTION ET RÉUNION DANS $\mathcal{P}(E)$

Rappelons qu'on appelle **intersection** de deux ou plusieurs ensembles, **l'ensemble de tous les éléments appartenant à tous ces ensembles** et **réunion** de deux ou plusieurs ensembles, **l'ensemble de tous les éléments appartenant à au moins un de ces ensembles.**

a) **Intersection dans** $\mathcal{P}(E)$.

L'intersection $A \cap B$ de deux parties de E,

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

est une partie de E : l'intersection est donc une *loi de composition interne* définie dans $\mathcal{P}(E)$.
Remarquons que l'on a $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$.
Quels que soient les éléments A, B, C de $\mathcal{P}(E)$ et pour tout x de E on a (cf § 1. 1 c, lois logiques n°s 5 et 3).

$$[(x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C] \Longleftrightarrow [x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C)]$$
$$(x \in A \text{ et } x \in B) \Longleftrightarrow (x \in B \text{ et } x \in A);$$

donc quels que soient A, B, C de $\mathcal{P}(E)$ on a

(1) $$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
(2) $$A \cap B = B \cap A.$$

L'intersection dans $\mathcal{P}(E)$ est donc *associative* et *commutative*. L'associativité nous permet d'écrire les deux membres de (1) sous la forme $A \cap B \cap C$.

Pour tout A de $\mathcal{P}(E)$ et tout x de E on a

$$(x \in E \text{ et } x \in A) \Longleftrightarrow (x \in A),$$

donc

(3) $$E \cap A = A.$$

L'intersection dans $\mathcal{P}(E)$ possède donc un *élément neutre*, la partie pleine de E.

EXERCICES

1. Montrer que pour l'intersection dans $\mathcal{P}(E)$ le seul élément symétrisable est E.
2. Montrer que quel que soit A de $\mathcal{P}(E)$ on a $A \cap A = A$.

b) **Réunion dans** $\mathcal{P}(E)$.

La réunion $A \cup B$ de deux parties de E,

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

est une partie de E : la réunion est donc une *loi de composition interne* définie dans $\mathcal{P}(E)$.
Remarquons que l'on a $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$.
Quels que soient les éléments A, B, C de $\mathcal{P}(E)$ et pour tout x de E on a (cf § 1. 1 c, lois logiques n°s 6 et 4)

$$[(x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C] \Longleftrightarrow [x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C)],$$
$$(x \in A \text{ ou } x \in B) \Longleftrightarrow (x \in B \text{ ou } x \in A);$$

donc quels que soient A, B, C, de $\mathcal{P}(E)$ on a

(1') $$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
(2') $$A \cup B = B \cup A.$$

La réunion dans $\mathcal{P}(E)$ est donc *associative* et *commutative*. L'associativité nous permet d'écrire les deux membres de (1') sous la forme $A \cup B \cup C$.
Pour tout A de $\mathcal{P}(E)$ et tout x de E on a

$$(x \in \varnothing \text{ ou } x \in A) \Longleftrightarrow (x \in A),$$

donc

(3') $$\varnothing \cup A = A.$$

La réunion dans $\mathcal{P}(E)$ possède donc un *élément neutre*, la partie vide de E.

EXERCICES

3. Montrer que pour la réunion le seul élément symétrisable est $\varnothing$.
4. Montrer que quel que soit A de $\mathcal{P}(E)$ on a $A \cup A = A$.

c) **Propriétés conjointes de l'intersection et de la réunion dans** $\mathcal{P}(E)$.

Les lois logiques n°s 12 et 13 (cf § 1. 1 c) nous permettent d'écrire, quels que soient A, B, C de $\mathcal{P}(E)$ et pour tout x de E :

$$[x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)] \Longleftrightarrow [(x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)],$$
$$[(x \in A) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)] \Longleftrightarrow [(x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)],$$

c'est-à-dire

(4) $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
(4') $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Nous dirons que l'intersection et la réunion dans $\mathcal{P}(E)$ sont chacune *distributives par rapport à l'autre*.

D'autre part les lois de Morgan (cf § 1. 1 c, lois n°s 14 et 15) nous permettent d'écrire quels que soient les éléments A, B de $\mathcal{P}$ (E) et pour tout x de E

$$[\text{non } (x \in A \text{ et } x \in B)] \iff (x \notin A \text{ ou } x \notin B),$$
$$[\text{non } (x \in A \text{ ou } x \in B)] \iff (x \notin A \text{ et } x \notin B),$$

c'est-à-dire

(5) $\complement_E (A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$,

(5') $\complement_E (A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$.

Ces égalités sont connues sous le nom de *règles de dualité*. Ces règles permettent de déduire d'une relation entre A, B, C ..., parties quelconques de E, écrite à l'aide des symboles $\cap$, $\cup$, $=$, une relation similaire entre A, B et C ... en transposant les symboles $\cap$ et $\cup$. Donnons un exemple : supposons démontrée la relation (4); désignons par $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ les complémentaires respectifs de A, B, C dans E; nous aurons, (4) étant valable quels que soient A, B, C de $\mathcal{P}$ (E) :

$$\overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C});$$

d'où par passage au complémentaire des deux membres :

$$\overline{\overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})} = \overline{(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C})},$$

c'est-à-dire en appliquant plusieurs fois les règles (5) et (5')

$$\overline{\overline{A}} \cup \overline{(\overline{B} \cup \overline{C})} = \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} \cap \overline{(\overline{A} \cap \overline{C})},$$
$$\overline{\overline{A}} \cup (\overline{\overline{B}} \cap \overline{\overline{C}}) = (\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}) \cap (\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{C}}),$$

ou encore, puisque pour tout X de $\mathcal{P}$ (E) on a $\overline{\overline{X}} = X$,

(4') $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Nous dirons que nous avons déduit (4') de (4) par dualité.
De même ayant démontré les propriétés (1), (2), (3) de l'intersection, par dualité se trouvent, *ipso facto*, démontrées les propriétés (1'), (2'), (3') de la réunion. Nous dirons que les propriétés (1) et (1'), (2) et (2') ... sont duales l'une de l'autre.

d) Propriétés conjointes de l'intersection, de la réunion et de l'inclusion dans $\mathcal{P}$ (E).

Si $A \subset B$ il est évident que $A \cap B = A$; réciproquement si $A \cap B = A$ on a $A \subset B$. Par conséquent quels que soient A et B de $\mathcal{P}$ (E) on a

(6) $A \cap B = A \iff A \subset B$.

On démontrera de même que l'on a

(6') $A \cup B = B \iff A \subset B$.

Donc toute relation entre A, B, C ... écrite à l'aide des symboles, $\cap$, $\cup$, $\subset$ peut s'écrire uniquement avec les symboles $\cap$, $\cup$.
Démontrons par exemple que l'on a quels que soient A, B, C de $\mathcal{P}$ (E)

(7) $A \subset B \longrightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$

Si $A \subset B$ est vrai on a $A \cap B = A$ d'où

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (C \cap C) = A \cap C,$$

donc $(A \cap C) \subset (B \cap C)$. On démontre de même que

(7') $A \subset B \longrightarrow (A \cup C) \subset (B \cup C)$,

car si $A \subset B$ est vrai on a $A \cup B = B$ d'où

$$(A \cup C) \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (C \cup C) = B \cup C$$

donc $(A \cup C) \subset (B \cup C)$.
On exprime les implications (7) et (7') en disant que dans $\mathcal{P}$ (E) l'inclusion est compatible avec l'intersection et la réunion.

REMARQUE

On pourrait déduire (7') de (7) de la manière suivante; on a, (7) étant vraie quels que soient A, B, C :

$$(\overline{A} \subset \overline{B}) \longrightarrow (\overline{A} \cap \overline{C}) \subset (\overline{B} \cap \overline{C}).$$

Le premier membre est équivalent à $B \subset A$, le second à

$$\overline{(\overline{B} \cap \overline{C})} \subset \overline{(\overline{A} \cap \overline{C})},$$

c'est-à-dire à $(B \cup C) \subset (A \cup C)$, nous obtenons donc

$$(B \subset A) \longrightarrow (B \cup C) \subset (A \cup C).$$

EXERCICE

5. Utiliser les équivalences (6) et (6') pour simplifier $A \cap (A \cup B)$ et $A \cup (A \cap B)$.

1. 6 DIFFÉRENCE, DIFFÉRENCE SYMÉTRIQUE

a) Différence.

On appelle **différence** des ensembles A et B et on note $A - B$ l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B (fig. 1).

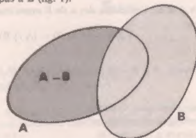


fig. 1

Pour deux parties A et B, éléments de $\mathcal{P}$ (E) on a donc

$$A - B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\},$$

d'où en notant $\overline{B}$ le complémentaire de B dans E

$$A - B = A \cap \overline{B}.$$

Si $B \subset A$ on a $A - B = \complement_A B$.

En particulier on a

$$E - A = \complement_E A.$$

On emploie souvent cette notation pour noter le complémentaire.

EXERCICE

1. Quel est la partie de E définie par (A − B) ∪ B?

b) **Différence symétrique.**

On appelle **différence symétrique** de deux ensembles A et B et on note A Δ B, l'ensemble de tous les éléments *appartenant à un seul des ensembles* A, B (fig. 2).

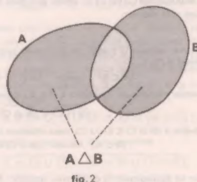


fig. 2

Au lieu de différence symétrique on dit aussi *somme booléenne* et on emploie également la notation $A \dot{+} B$.

Pour deux parties symétriques A et B, éléments de $\mathcal{P}$ (E) on a donc

$$A \,\Delta\, B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou bien } x \in B\};$$

c'est-à-dire que A Δ B est l'ensemble des x de E appartenant à A ∪ B et n'appartenant pas à A ∩ B, donc

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

EXERCICE

2. En écrivant $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$ montrer que $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$.

Les propriétés suivantes sont évidentes :
La différence symétrique est commutative,
si A ∩ B = ∅, alors A Δ B = A ∪ B,

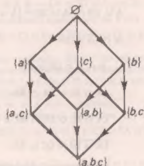
si A = B on a A Δ A = ∅,
si A ⊂ B on a A Δ B = B − A,
si B = ∅ on a A Δ ∅ = A,
si B = E on a $A \,\Delta\, E = \overline{A}$.

La différence symétrique possède bien d'autres propriétés; nous vous les proposons en exercices à la fin du chapitre. (ex. 1.22 et 1.24).

EXERCICES

Formation de $\mathcal{P}$ (E) : 1-2-3.
Inclusion, complémentaire, intersection, réunion : 4 à 17.
Dualité : 18.
Différence : 19-20-21-23.
Différence symétrique : 22-24.

1.1 Soit E = {a, b, c}. On peut représenter $\mathcal{P}$ (E) par le schéma suivant, où X ⟶ Y signifie X ⊂ Y :



Représenter de même $\mathcal{P}$ (E) si E = {2, 3, 5, 13}.
En déduire tous les diviseurs de 390.

1.2 Soit E = {4, 3, 5, 1}. Former P (E).
Former tous les nombres distincts à trois chiffres distincts que l'on peut écrire à l'aide des chiffres du nombre 4 351.

1.3 Soient E = {a, b} et F = {1, 2}. Fomer $\mathcal{P}$ (E × F).

1.4 Soient six points A, B, C, D, E, F situés dans cet ordre sur une droite. Mettre en évidence sur un schéma l'ensemble :

([A, B] ∪ [C, F]) ∩ ([A, C] ∪ [E, D])

puis l'ensemble :

([A, D] ∩ [C, E]) ∪ ([B, E] ∩ [C, F])

Retrouver les résultats en utilisant la distributivité de l'intersection (resp. la réunion) par rapport à la réunion (resp. l'intersection).

1.5 Trouver dans ℕ l'ensemble des nombres « multiples de 2 et multiples de 16 », l'ensemble des nombres « multiples de 2 ou multiples de 16 ».

1.6 Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
a) Quelle est l'intersection de l'ensemble des multiples de 3 et de l'ensemble des multiples de 2? Quel est le complémentaire dans $\mathbb{N}$ de cette intersection?
b) Quel est le complémentaire dans $\mathbb{N}$ de l'ensemble des nombres « pairs ou non multiples de 5 »?

1.7 A et B étant deux parties quelconques d'un ensemble E, simplifier à l'aide de tables de vérité :

$$A \cap (A \cup B)$$
$$A \cup (A \cap B)$$

(une autre démonstration de ces résultats vous a été proposée au § 1.5 d., exercice 5).

A, B, C étant trois parties quelconques d'un ensemble E, les complémentaires dans E de A, B, C étant respectivement $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, simplifier (ex. 1.8 à 1.16).

1.8 $[A \cup (A \cap B)] \cap B.$

1.9 $(A \cup B) \cap (B \cap C) \cap (C \cup A).$

1.10 $A \cup \{[B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)]\}.$

1.11 $A \cap (\overline{A} \cup B).$

1.12 $A \cap B \cap (B \cup \overline{C}).$

1.13 $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$

1.14 $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$

1.15 $\overline{(A \cup B)} \cap (C \cup \overline{A}).$

1.16 $\overline{[\overline{(A \cap B)} \cap \overline{(A \cap C)}] \cup A}.$

1.17 Démontrer que ($\overline{X}$ désignant le complémentaire de X dans E)

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$
$$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}.$$

1.18 Quels sont les résultats que l'on peut déduire de ceux des exercices 1.8 à 1.14 par dualité (en faire la démonstration par passage aux complémentaires cf. § 1.5 c).

1.19 On rappelle que $A - B = A \cap \overline{B}$ désigne la différence des parties A et B de E. ($\overline{X}$ désignant le complémentaire de X dans E); simplifier :

$$B \cup (A - B)$$
$$A \cup (B - A)$$
$$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A).$$

1.20 Démontrer que, dans $\mathcal{P}$ (E), l'intersection est distributive par rapport à la différence.

1.21 Démontrer que :

$$(A - B) - C = A - (B \cup C)$$
$$(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$$

1.22 Simplifier :

$$(A \Delta B) \cup (A \Delta \overline{B}).$$

Sujets d'étude

1.23 Soient A et B deux parties quelconques d'un ensemble E.
a) A quelle condition existe-t-il des parties X de E telles que

$$A \cup X = B \qquad (1)$$

Cette condition étant remplie, déterminer toutes les parties X de E solutions de (1).
Examiner le cas particulier où $A = B$.
b) Étudier de même s'il existe des parties Y de E telles que

$$A \cap Y = B \qquad (2)$$

Examiner le cas particulier où $A = B$.
c) Comment ramener le problème *b)* à un problème du type de celui du *a)* ci-dessus?

1.24 Soient A et B deux parties quelconques d'un ensemble E, donc deux éléments de $\mathcal{P}$ (E). On rappelle que la différence symétrique des deux ensembles A et B est

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}.$$

a) Démontrer que :

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

b) En déduire que, C étant un élément quelconque de $\mathcal{P}$ (E) :

$$(A \Delta B) \Delta C = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C).$$

c) En déduire que la différence symétrique dans $\mathcal{P}$ (E) est associative.
d) Soit x un élément quelconque de E, démontrer l'associativité de la différence symétrique en cherchant la table de vérité de : $x \in [(A \Delta B) \Delta C]$ et la table de vérité de : $x \in [A \Delta (B \Delta C)]$ (8 cas à étudier).
e) Démontrer que ($\mathcal{P}$ (E), Δ) *est un groupe commutatif.*
f) En utilisant le résultat de la question *a)*, démontrer que :

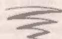
$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$$

et que l'on a également :

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}).$$

En déduire que, dans $\mathcal{P}$ (E), l'intersection est distributive par rapport à la différence symétrique.
g) Retrouver cette distributivité en cherchant, x étant un élément quelconque de E, la table de vérité de : $x \in [A \cap (B \Delta C)]$ et la table de vérité de : $x \in [(A \cap B) \Delta (A \cap C)]$.
h) Démontrer que ($\mathcal{P}$ (E), Δ, $\cap$) *est un anneau commutatif unitaire.*

N. B. Une autre démonstration de ces propriétés, à l'aide des fonctions caractéristiques des parties d'un ensemble, vous sera proposée au chapitre suivant.



2

Applications

Conformément au programme nous présentons une révision des définitions et des principaux résultats relatifs aux applications.
Nous y avons joint l'étude de l'addition et de la multiplication des fonctions numériques. Cela nous permet de retrouver d'une manière simple les résultats de l'algèbre des parties d'un ensemble à l'aide des fonctions caractéristiques de ces parties.

2. 1 RELATION BINAIRE. FONCTION. APPLICATION. (RAPPELS)

a) Relation binaire : fonction propositionnelle à deux variables.

Rappelons qu'une *relation binaire* $\mathcal{R}$ est définie par la donnée d'un triplet (E, F, G), E étant l'ensemble de départ ou source de $\mathcal{R}$, F étant l'ensemble d'arrivée ou but de $\mathcal{R}$ et G étant une partie du produit cartésien E × F; G s'appelle le **graphe** de $\mathcal{R}$. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire de E vers F; si E = F on dit simplement que $\mathcal{R}$ est une relation binaire dans E.
Les éléments x de E et y de F sont associés par la relation $\mathcal{R}$ et on écrit $x \mathcal{R} y$ ou $\mathcal{R}(x, y)$ si et seulement si (x, y) est un élément du graphe G de $\mathcal{R}$. Par conséquent pour tout couple (x, y) élément de E × F on a

$$\mathcal{R}(x, y) \iff (x, y) \in G$$

L'énoncé $\mathcal{R}(x, y)$ concerne tous les éléments de E × F, il est vrai pour $(x, y) \in G$ et faux pour $(x, y) \in (E \times F) - G$; c'est une fonction propositionnelle à deux variables x, décrivant E et y, décrivant F. Lorsque l'on *spécifie* les variables x et y on obtient une assertion.
Nous avons vu en Seconde qu'un énoncé tel que

$$(\forall x \in E)(\exists y \in F)\ \mathcal{R}(x, y),$$

ainsi que les énoncés analogues obtenus en faisant précéder chacune des lettres x et y d'un quantificateur sont des *assertions*. Rappelons que l'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs est essentiel Rappelons également que l'on a, par exemple,

$$\text{non}\ [(\forall x \in E)(\exists y \in F)\ \mathcal{R}(x, y)] \iff (\exists x \in E)(\forall y \in F)\ \text{non}\ \mathcal{R}(x, y).$$

b) Fonction.

Pour une relation binaire quelconque de E vers F, distinct ou non de E, à tout élément de la source E est associé zéro, un ou plusieurs éléments du but F.
Une **fonction** f de source E et de but F est une relation binaire de E vers F telle qu'à tout élément de E est associé un élément au plus (c'est-à-dire *zéro ou un élément*) de F. Lorsque l'élément unique de F associé à un élément x de E par f existe, on dit que cet élément est l'*image* de x par f, on le note $f(x)$. On dit aussi que $f(x)$ est la valeur de f pour l'élément x de la source

L'ensemble D des éléments de E qui ont une image par f s'appelle l'*ensemble de définition de f*. On dit que f est *définie* sur D et *prend ses valeurs dans* F
Une *fonction numérique* est une fonction dont le but est $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$.
Une fonction numérique de la variable réelle est une fonction dont la source et le but sont $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$.

c) Application.

Une **application** de E dans F est une fonction telle qu'à tout élément de E est associé un *élément unique* de F. Une application est donc une fonction particulière pour laquelle la source est égale à l'ensemble de définition : E = D.
L'ensemble de toutes les applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.
Rappelons que si f est une application de E dans F et f' une application de E' dans F, E' ⊂ E, on dit que f' est la *restriction* de f à E' ou que f est un *prolongement* de f' à E si et seulement si

$$(\forall x \in E')\quad f(x) = f'(x)$$

Remarquons que si f de E dans F est donnée ainsi que E' ⊂ E, alors sa restriction f' à E' est entièrement déterminée.
En revanche si E et F sont donnés ainsi que f' application de E' ⊂ E dans F, les valeurs $f(x)$ d'un prolongement f de f' à E ne sont connues que pour $x \in E'$; pour construire un prolongement f de f' à E il faudra, pour tout $x \in E - E'$, choisir dans F les valeurs $f(x)$.

2. 2 CLASSIFICATION DES APPLICATIONS

On s'est préoccupé précédemment du nombre d'éléments du but F associés à tout élément de la source E (pour une relation binaire ce nombre est 0 ou 1 ou un nombre supérieur à 1, pour une fonction ce nombre est 0 ou 1, pour une application ce nombre est 1).
Considérons une application f de E dans F. Soit un élément quelconque y du but F. Étudions le nombre d'éléments de E dont il est l'image par l'application f de E dans F, c'est-à-dire le nombre de solutions de l'*équation* $f(x) = y$, dans laquelle y est un élément donné quelconque de F et x est l'inconnue désignant un élément de E.
Nous nous proposons de faire une classification de E dans F suivant le nombre de solutions de l'équation précédente.

a) Application surjective ou surjection.

Définition.
On appelle **application surjective** ou **surjection** toute application telle que tout élément du but soit l'image d'un élément **au moins** de la source

Autrement dit, une application f de E dans F est surjective si et seulement si l'équation $f(x) = y$, où y est donné quelconque appartenant à F et x cherché appartenant à E, a au moins une solution.
Si $f(E)$ désigne l'ensemble des images de tous les éléments de E par f, rappelons que $f(E)$ s'appelle l'image de la source E par f ou simplement l'*image de f*. On peut dire qu'une application f de E dans F est surjective si et seulement si on a : $f(E) = F$.
Notons que, lorsqu'une application de source E et de but F est surjective, on dit que c'est une application de E *sur* F.

En utilisant les quantificateurs, le fait que f application de source E et de but F est surjective s'écrit

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E) \quad f(x) = y$$

EXERCICES

1. Interpréter l'assertion
$$(\exists x \in E)(\forall y \in F) \quad f(x) = y$$
2. Écrire à l'aide des quantificateurs que l'application, $f : E \longrightarrow F$, n'est pas surjective.

b) Application injective ou injection.

Définition.

On appelle **application injective** ou **injection** toute application telle que tout élément du but soit l'image d'un élément **au plus** de la source.

Autrement dit, une application f de E dans F est injective si et seulement si l'équation $f(x) = y$, où y est donné quelconque appartenant à F et x cherché appartenant à E, a au plus une solution.

On peut dire qu'une application f de E dans F est injective si et seulement si on a :

$$(\forall (x, x') \in E \times E) \quad [f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x']$$

L'implication précédente est équivalente à sa contraposée. On peut donc dire qu'une application f de E dans F est injective si et seulement si on a :

$$(\forall (x, x') \in E \times E) \quad [x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')],$$

c'est-à-dire si et seulement si les images par f de deux éléments quelconques distincts de E sont deux éléments distincts de F.

EXERCICE

3. Écrire sans signe d'implication qu'une application est injective (cf § 1. 1 c, loi logique n° 7). En déduire une formule utilisant les quantificateurs signifiant que f n'est pas injective.

c) Application bijective ou bijection.

Définition.

On appelle **application bijective** ou **bijection** toute application telle que tout élément du but soit l'image d'un élément **unique** de la source.

Autrement dit, une application f de E dans F est bijective si et seulement si l'équation $f(x) = y$, où y est donné quelconque appartenant à F et x cherché appartenant à E, a une solution unique.

Pour que cette équation admette une solution unique, il faut et il suffit qu'elle admette à la fois une solution au moins et une solution au plus. *Une application est donc bijective si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.*

Lorsqu'une application f de E dans F est bijective on dit que c'est une application bijective ou une bijection de E *sur* F.

d) Exemples.

1. Soit une application f de E dans F telle que, k étant un élément du but F, on ait :

$$(\forall x \in E) \quad f(x) = k;$$

on dit que f est une *application constante* de E dans F.
Si E et F contiennent plusieurs éléments, f n'est si surjective ni injective. Si E contient un seul élément, f est injective. Si F contient le seul élément k, f est surjective. Si E et F contiennent un seul élément, f est bijective.

2. Soit l'application f de E dans E telle que

$$(\forall x \in E) \quad f(x) = x$$

on dit que f est l'**application identique** de E ou l'**identité** de E, que l'on note id_E; f est une bijection de E sur E.

3. Soient E un ensemble, A une partie de E et F l'ensemble $\{0, 1\}$. Considérons l'application f_A de E dans F telle que :

$$f_A(x) = 0 \quad \text{si } x \notin A$$
$$f_A(x) = 1 \quad \text{si } x \in A.$$

A toute partie A de E on peut associer une application f_A de E dans F et réciproquement, si on connaît f_A c'est-à-dire si on connaît la valeur $f_A(x)$ (0 ou 1) de f_A pour tout élément x de E, A sera parfaitement déterminée. Une telle application est appelée **fonction caractéristique** de la partie A de E. Si l'on désigne par $\mathfrak{T}(E)$ l'ensemble des parties de E et par $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans $F = \{0, 1\}$, il existe donc une bijection de $\mathfrak{T}(E)$ sur $\mathcal{F}(E, F)$, c'est la bijection : $A \longmapsto f_A$.

EXERCICES

4. La symétrie de centre O dans le plan et la symétrie d'axe Δ dans le plan sont des bijections du plan sur lui-même.
5. La projection d'un plan P sur une droite D de ce plan parallèlement à une droite Δ de P est surjective, elle n'est pas injective. Par contre la restriction de cette projection à une droite D' de P non parallèle à Δ est une bijection de D' sur D.
6. Soit l'application f de E dans F définie par $x \longmapsto x^2$.
Si $E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{N}$, f n'est pas surjective (il n'existe pas d'entier naturel x tel que $x^2 = 2$ par exemple), mais f est injective (deux entiers naturels distincts ont des carrés distincts).
Si $E = \mathbb{Z}$ et $F = \mathbb{N}$, f n'est pas surjective (il n'existe pas d'entier relatif x tel que $x^2 = 2$ par exemple) et f n'est pas injective (deux entiers relatifs opposés ont même carré).
Si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}_+$, f est surjective (tout nombre positif ou nul est l'image d'un nombre réel au moins) (voir cours de Seconde), mais f n'est pas injective (deux nombres opposés ont même carré).
Si $E = \mathbb{R}_+$ et $F = \mathbb{R}_+$, f est bijective (tout nombre positif ou nul est l'image d'un nombre positif ou nul unique).
7. Soit l'application de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \dfrac{2x+5}{x-1}$; y étant un nombre réel quelconque donné et x un nombre que l'on cherche dans $\mathbb{R} - \{1\}$ on a

$$(1) \qquad \frac{2x+5}{x-1} = y \iff yx - y = 2x + 5$$
$$\iff yx - 2x = y + 5$$
$$\iff (y-2)x = y + 5 \qquad (2)$$

Si $y = 2$, (2) n'a pas de solution donc (1) non plus

Si $y \neq -2$, (2) et (1) ont une solution unique $x = \dfrac{y+5}{y-2}$.

Donc l'application de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \dfrac{2x+5}{x-1}$ est injective, mais n'est pas surjective. L'application de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R} - \{2\}$ définie par $x \longmapsto \dfrac{2x+5}{x-1}$ est bijective.

2. 3 COMPOSITION DES APPLICATIONS

a) Composition de deux applications.

Soient une application f de E dans F et une application g de F dans G *(notons que l'on suppose que le but de f est égal à la source de g)*.

A tout élément x de E on sait associer un élément unique de F tel que $y = f(x)$ et à cet élément y on sait associer un élément unique z de G tel que $z = g(y)$. On peut écrire $z = g[f(x)]$. On définit ainsi une application de E dans G. Dans l'écriture $g[f(x)]$, g figure à gauche et f à droite. Pour cette raison, cette application de E dans G sera notée $g \circ f$ où g figure à gauche et f à droite.

Pour tout x de E on a donc

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Remarquons toutefois que dans le schéma

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & y & \longmapsto & z \end{array}$$

f figure à gauche et g à droite. Nous dirons que $g \circ f$ est la *composée* de f *suivie* de g; ces trois applications peuvent se représenter par l'un des schémas suivants (fig 1).

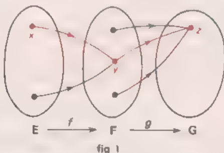


fig 1

Soit f une application de E dans F, id_E l'identité de E et id_F l'identité de F. Les schémas

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{id_E} & E & \xrightarrow{f} & F \\ x & \longmapsto & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{id_F} & F \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

montrent que pour tout x de E on a

$$(f \circ id_E)(x) = (id_F \circ f)(x) = f(x)$$

donc

$$f \circ id_E = id_F \circ f = f$$

EXEMPLES

1. Soient f et g les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = x^2$. Déterminons les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a pour tout x réel :
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x+3),$$
l'image de x par g est x^2, donc l'image de $2x + 3$ par g est $(2x+3)^2$, donc
$$(g \circ f)(x) = (2x+3)^2.$$
On a de même pour tout x réel
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2)$$
l'image de x par f est $2x + 3$, donc l'image de x^2 par f est $2x^2 + 3$ donc
$$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 3$$
Nous voyons que $g \circ f \neq f \circ g$.
2. Dans un plan P, soient Δ et Δ' deux droites perpendiculaires en O. Supposons que la source et le but soient P et désignons par f la symétrie d'axe Δ, g la symétrie de centre O, h la symétrie d'axe Δ'. Nous avons pour tout point M de P (fig. 2)

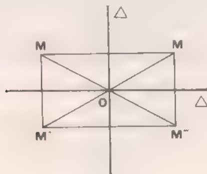


fig 2

$$(g \circ f)(M) = g[f(M)] = g(M') = M'', \text{ or } h(M) = M'',$$

donc $g \circ f = h$. De même $(f \circ g)(M) = f[g(M)] = f(M''') = M''$,
donc on a aussi $f \circ g = h$. On a donc dans le cas étudié $f \circ g = g \circ f = h$.
Vous vérifierez que l'on a aussi $g \circ h = h \circ g = f$, $h \circ f = f \circ h = g$, donc la composée de deux des symétries f, g, h est égale à la troisième.

b) Associativité.

Soient les applications f, g, h données par le schéma

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G & \xrightarrow{h} & H \\ x & \longmapsto & y & \longmapsto & z & \longmapsto & t \end{array}$$

Les schémas suivants

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{g \circ f} & G & \xrightarrow{h} & H \\ x & \longmapsto & z & \longmapsto & t \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{h \circ g} & H \\ x & \longmapsto & y & \longmapsto & t \end{array}$$

montrent que pour tout x de E les applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ donnent une même image t dans H; nous avons donc :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

cette application unique s'écrira $h \circ g \circ f$. Nous dirons que la composition des applications est *associative*.
Si f, g sont des applications de E dans E il en est de même de $g \circ f$, donc la composition des applications est une loi interne définie dans l'ensemble $\mathcal{F}$ (E, E) des applications de E dans E; cette loi interne est associative

c) Application composée de deux surjections ou de deux injections ou de deux bijections.

Soient une *surjection* f de E sur F et une *surjection* g de F sur G.

$$\text{E} \xrightarrow{f} \text{F} \xrightarrow{g} \text{G}$$
$$x \longmapsto y \longmapsto z.$$

Tout élément z de G est l'image par g d'un élément au moins de F puisque g est surjective. Soit y l'un de ces éléments, on a : $z = g(y)$; or y est l'image par f d'un élément au moins de E puisque f est surjective Soit x l'un de ces éléments, on a $y = f(x)$.
Donc $z = g(y) = g[f(x)]$ et tout élément z de G est l'image par $g \circ f$ d'un élément au moins x de E : $g \circ f$ est surjective.
Nous pouvons énoncer : *la composée de deux surjections est une surjection.*

Soient une *injection* f de E dans F et une *injection* g de F dans G. Quel que soit (x, x') de E × E on a :

$$g[f(x)] = g[f(x')] \Longrightarrow f(x) = f(x')$$

puisque g est injective, et

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

puisque f est injective. Par suite quel que soit (x, x') de E × E on a :

$$g[f(x)] = g[f(x')] \Longrightarrow x = x'$$

donc $g \circ f$ est injective.
Nous pouvons énoncer : *la composée de deux injections est une injection.*
Il résulte des deux résultats précédents que si f et g sont bijectives, c'est-à-dire à la fois surjectives et injectives, il en est de même de $g \circ f$. Nous pouvons énoncer : *la composée de deux bijections et une bijection.*

2. 4 APPLICATION RÉCIPROQUE D'UNE BIJECTION

a) Définition. Exemples.

Soit une application f de E dans F définie par $x \longmapsto y = f(x)$. Cherchons s'il existe une application de F dans E qui associe à tout élément y de F un élément unique x de E tel que $y = f(x)$. L'application cherchée existe si et seulement si l'équation $f(x) = y$ où y est donné quelconque appartenant à F et x cherché appartenant à E, a une solution unique c'est-à-dire si et seulement si f est bijective.
L'application cherchée s'appelle alors l'**application réciproque** de f. On la note f^{-1}. On peut écrire :

$$(\forall (x, y) \in \text{E} \times \text{F}) \quad y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

L'équation $f^{-1}(y) = x$, où x est donné quelconque appartenant à E et y cherché appartenant à F, a une solution unique. Donc f^{-1} est une *bijection* de F sur E; on dit que c'est

la **bijection réciproque** de la bijection f. La bijection réciproque de f^{-1} est f; on dit que f et f^{-1} sont deux **bijections réciproques.**

EXEMPLES

1. Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto 2x + 3$.
Elle est bijective car l'équation $2x + 3 = y$ (y nombre réel donné, x nombre réel cherché) a une solution unique qui est $x = \frac{1}{2}(y - 3)$.
L'application réciproque de f est la bijection f^{-1} de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: $x \longmapsto \frac{1}{2}(x - 3)$.
2. Soit l'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$: $x \longmapsto x^2$ Elle est bijective et l'application réciproque de f est la bijection f^{-1} de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$: $x \longmapsto \sqrt{x}$ (résultat établi en classe de Seconde).
3. On a vu (§ 2. 2 d exemple 7) que l'application f de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R} - \{2\}$: $x \longmapsto \frac{2x+5}{x-1}$ est bijective. On a vu que l'équation $\frac{2x+5}{x-1} = y$ (y nombre réel quelconque donné, x cherché appartenant à $\mathbb{R} - \{1\}$) a une solution unique si et seulement si $y \neq 2$. Cette solution est $x = \frac{y+5}{y-2}$.
L'application réciproque de f est la bijection f^{-1} de $\mathbb{R} - \{2\}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$:
$$x \longmapsto \frac{x+5}{x-2}.$$

b) Propriétés.

Soient f une bijection de E sur F et f^{-1} la bijection réciproque de f, on a

$$(\forall (x, y) \in \text{E} \times \text{F}) \quad y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

d'où pour tout x de E $\quad x = f^{-1}[f(x)] = (f^{-1} \circ f)(x) \quad$ c'est-à-dire

$$\boxed{f^{-1} \circ f = \text{id}_{\text{E}}}.$$

On a de même pour tout y de F

$$y = f[f^{-1}(y)] = (f \circ f^{-1})(y)$$

d'où $$\boxed{f \circ f^{-1} = \text{id}_{\text{F}}}.$$

Soient une bijection f de E sur F et une bijection g de F sur G. On sait que l'application composée $g \circ f$ est une bijection de E sur G. Cherchons à déterminer $(g \circ f)^{-1}$. Nous avons quel que soit (x, y, z) de E × F × G

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

et $\quad z = g(y) \Longleftrightarrow y = g^{-1}(z).$

D'où $\quad x = f^{-1}[g^{-1}(z)] = (f^{-1} \circ g^{-1})(z).$

Mais on a $\quad z = (g \circ f)(x) \Longleftrightarrow x = (g \circ f)^{-1}(z),$

donc $\quad (\forall z \in \text{G}) \quad (g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z),$

d'où $$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}.$$

c) Ensemble des bijections de E sur E.

Une bijection de E sur E s'appelle une **permutation** de E. Désignons par $\mathcal{B}(E, E)$ l'ensemble des permutations de E; la composée de deux bijections de E sur E est une bijection de E sur E; la composition des applications est donc une loi interne définie dans $\mathcal{B}(E, E)$; notons $(\mathcal{B}(E, E), \circ)$ l'ensemble de ces permutations muni de la loi de composition des applications notée $\circ$. La loi est associative (§ 2. 3 b). L'élément neutre est id_E car id_E est une bijection de E sur E et $f \circ id_E = id_E \circ f = f$ pour toute bijection f de E sur E. La bijection réciproque f^{-1} de la bijection f de E sur E est une bijection de E sur E telle que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id_E$. Donc
$(\mathcal{B}(E, E), \circ)$ *ensemble des permutations de E muni de la loi de composition des applications est un groupe*

d) Bijection involutive de E sur E.

Une bijection f de E sur E est involutive si et seulement si $f = f^{-1}$. Par exemple dans un plan P la symétrie centrale de centre C et la symétrie axiale d'axe Δ sont des bijections involutives de P.
Si f est une involution de E, $f = f^{-1}$ donc $f \circ f = f \circ f^{-1} = id_E$. Réciproquement si f est une bijection de E sur E telle que $f \circ f = id_E$, comme on a aussi $f \circ f^{-1} = id_E$; on en déduit que $f = f^{-1}$ car l'application réciproque d'un élément quelconque de $\mathcal{B}(E, E)$ est unique. On peut donc écrire pour toute bijection f de E sur E

$$f = f^{-1} \iff f \circ f = id_E.$$

2. 5 OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Désignons par $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur un *même ensemble* D et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Addition des fonctions numériques.

Étant donnés deux éléments f et g de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, on appelle **somme** de f et g la fonction numérique définie sur D, que l'on note $f + g$, telle que :

$$(\forall x \in D) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

On définit ainsi une loi interne dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, l'**addition**. Vous démontrerez à titre d'exercice que cette addition est *commutative* et *associative*.
L'application, $\omega : D \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$(\forall x \in D) \quad \omega(x) = 0$$

vérifie, quel que soit f de $\mathcal{F}(D, R)$,

$$\omega + f = f + \omega = f$$

Cette fonction ω appelée *fonction nulle* sur D, est l'*élément neutre* de $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +)$. Par abus de notation, si aucune confusion n'est à craindre on note 0 cette fonction ω. Vous démontrerez sans peine que tout élément f de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ est symétrisable, le symétrique de f appelée *fonction opposée* de f se note $-f$. Il en résulte que $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +)$ **est un groupe commutatif.**

b) Multiplication des fonctions numériques.

Étant donnés deux éléments f et g de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ on appelle **produit** de f et g la fonction numérique définie sur D, que l'on note $f \times g$, ou plus simplement fg, telle que

$$(\forall x \in D) \quad (fg)(x) = f(x)\,g(x)$$

On définit ainsi une loi interne dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, la **multiplication**. Vous démontrerez à titre d'exercice que cette multiplication est *commutative* et *associative*.
L'application, $u : D \longmapsto \mathbb{R}$; telle que

$$(\forall x \in D) \quad u(x) = 1,$$

vérifie, quel que soit f de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$

$$uf = fu = f;$$

cette fonction u, appelée *fonction unité* définie sur D, est l'élément neutre de $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), \times)$. Par abus de notation, si aucune confusion n'est à craindre, on note 1 cette fonction u. Vous démontrerez sans peine que dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition. Il en résulte que $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, \times)$ **est un anneau commutatif unitaire** (cf cours de Seconde)

EXERCICES

1. Montrer que $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ est symétrisable pour la multiplication si et seulement si $(\forall x \in D) \quad f(x) \neq 0.$

   Le symétrique de f se note $\frac{1}{f}$.

2. Soient les fonctions numériques, définies sur $\mathbb{R}$, suivantes
   $$f : x \longmapsto \sqrt{x^2} + x, \quad g : x \longmapsto \sqrt{x^2} - x.$$
   On a
   $$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (fg)(x) = (\sqrt{x^2} + x)(\sqrt{x^2} - x) = 0;$$
   fg associe donc à tout nombre réel x le nombre réel 0. La fonction fg est donc la *fonction nulle* sur $\mathbb{R}$. Cet exemple nous montre que dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ il existe des fonctions autres que la fonction nulle dont le produit est la fonction nulle. De telles fonctions s'appellent des *diviseurs de zéro* (l'élément zéro désigne la fonction nulle).

Remarque. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, c'est-à-dire si $D = \mathbb{R}$, on peut définir les deux lois internes

$$(f, g) \longmapsto fg \quad \text{et} \quad (f, g) \longmapsto f \circ g;$$

vous ne confondrez pas le **produit** de f et g et la **composée** de f et g.
Ces deux lois sont *associatives*, mais *seule la multiplication* est *commutative*.
L'élément neutre de la multiplication est u, fonction constante sur $\mathbb{R}$ de valeur 1 et celui de la composition est $e = id_{\mathbb{R}}$.
Les éléments symétrisables de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \times)$ sont les fonctions telles que pour tout x de $\mathbb{R}$ on ait $f(x) \neq 0$ et ceux de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \circ)$ sont les applications bijectives de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

c) Multiplication d'une fonction numérique par un nombre réel.

On appelle **produit d'une fonction numérique** f définie sur D **par un nombre réel** λ, la fonction numérique définie sur D et notée $\lambda \bullet f$, ou plus simplement λf, telle que

$$(\forall x \in D) \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

On définit ainsi une *loi de composition externe* dans $\mathcal{F}$ (D, $\mathbb{R}$), le *domaine des opérateurs* étant $\mathbb{R}$, nous l'appellerons **multiplication externe** par un nombre réel.
Vous vérifierez sans peine que l'on a quels que soient λ, μ de $\mathbb{R}$ et f, g de $\mathcal{F}$ (D, $\mathbb{R}$)

$$1f = f, \quad \lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f,$$
$$(\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f, \quad \lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g.$$

Comme ($\mathcal{F}$ (D, $\mathbb{R}$), +) est un groupe commutatif il en résulte que ($\mathcal{F}$ (D, $\mathbb{R}$), +, •), c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{F}$ (D, $\mathbb{R}$) muni de l'addition et de la multiplication externe, est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$ (voir cours de Seconde).

2. 6 ÉTUDE DES OPÉRATIONS SUR LES PARTIES D'UN ENSEMBLE A L'AIDE DE LEURS FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Soient un ensemble E, une partie A de E, F = {0, 1}. On a défini (§ 2. 2 d) ce qu'on appelle **fonction caractéristique** f_A de A. C'est une fonction numérique définie sur E et prenant ses valeurs dans F.
Notons d'abord que quels que soient A et B de $\mathcal{P}$ (E) on a

$$f_A = f_B \Longleftrightarrow A = B.$$

Soient $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E, B une autre partie de E et f_B la fonction caractéristique associée à B. Connaissant f_A et f_B, calculons $f_{A \cup B}$, $f_{A \cap B}$ et $f_{\overline{A}}$. Pour cela écrivons les tables de vérité de ($x \in A \cap B$) et de ($x \in A \cup B$) et adjoignons dans le tableau les valeurs de f_A, f_B, $f_{A \cap B}$, $f_{A \cup B}$, $f_{\overline{A}}$ pour tout x de E dans chacun des quatre cas classiques :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in (A \cap B)$	$x \in (A \cup B)$	$f_A(x)$	$f_B(x)$	$f_{A \cap B}(x)$	$f_{A \cup B}(x)$	$f_{\overline{A}}(x)$
V	V	V	V	1	1	1	1	0
V	F	F	V	1	0	0	1	0
F	V	F	V	0	1	0	1	1
F	F	F	F	0	0	0	0	1

Nous voyons que l'on a quelles que soient les parties A et B de E et pour tout x de E :

$$f_{A \cap B}(x) = f_A(x) f_B(x),$$
$$f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x),$$
$$f_{\overline{A}}(x) = 1 - f_A(x).$$

Nous avons donc quels que soient A et B de $\mathcal{P}$ (E) :

(1) $\quad f_{A \cap B} = f_A f_B,$
(2) $\quad f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A f_B,$
(3) $\quad f_{\overline{A}} = 1 - f_A$

Notons que la fonction nulle sur E, soit 0, est $f_{\varnothing}$ et la fonction unité, notée 1, est la fonction f_E.

A l'aide de ces égalités, on peut démontrer toutes les propriétés de la réunion et de l'intersection. Notons avant de donner des exemples de tels calculs que l'on a, quel que soit A de $\mathcal{P}$ (E),

$$f_A^2 = f_A,$$
$$f_A(1 - f_A) = 0 ;$$

ces égalités traduisent respectivement les égalités $A \cap A = A$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
Montrons, par exemple, que l'intersection est distributive par rapport à la réunion. On a

$$f_{A \cap (B \cup C)} = f_A f_{B \cup C} = f_A (f_B + f_C - f_B f_C) = f_A f_B + f_A f_C - f_A f_B f_C,$$
$$f_{(A \cap B) \cup (A \cap C)} = f_{A \cap B} + f_{A \cap C} - f_{A \cap B} f_{A \cap C} = f_A f_B + f_A f_C - (f_A f_B)(f_A f_C)$$
$$= f_A f_B + f_A f_C - f_A f_B f_C$$

car $(f_A)^2 = f_A$. La relation $f_{A \cap (B \cup C)} = f_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}$ montre donc que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

EXERCICES

1. Démontrer en utilisant les fonctions caractéristiques de A, B, C parties de E que l'on a

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

2. Interpréter la relation $f_A f_B = f_A$ à l'aide d'une inclusion.
Traduisez à l'aide d'une relation entre f_A et f_B la relation $A \cup B = B$.

Pour la différence A − B (cf 1. 6) on a

$$f_{A-B} = f_{A \cap \overline{B}} = f_A f_{\overline{B}} = f_A (1 - f_B),$$

et pour la différence symétrique $A \Delta B$ (cf 1. 6) on a

$$f_{A \Delta B} = f_{(A \cup B)-(A \cap B)} = f_{A \cup B}(1 - f_{A \cap B}) = (f_A + f_B - f_A f_B)(1 - f_A f_B)$$

d'où en utilisant les relations $f_A^2 = f_A$ et $f_B^2 = f_B$

$$f_{A \Delta B} = f_A + f_B - 2 f_A f_B.$$

EXERCICE

3. En utilisant les fonctions caractéristiques démontrer que

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

D'autres propriétés démontrées par ce procédé vous seront proposées à titre d'exercice à la fin du chapitre (cf ex. n° 2.20).

EXERCICES

Classification des applications (surjections, injections, bijections) : 1 à 6.

Composition des applications : 5 à 11.

Bijection réciproque d'une bijection : 12 à 15.

Involution : 16 à 18.

Le sujet d'étude 19 porte sur la classification des applications et leur composition; le sujet d'étude 20 porte sur les fonctions caractéristiques des parties d'un ensemble.

2.1 Examiner si l'application f de E dans F définie par $x \longmapsto x^2$ est sujective, injective ou bijective dans les cas suivants :
a) $E = \mathbb{N}$, $F = \mathbb{N}$.
b) E [illegible], F [illegible]

2.2 Soit E l'ensemble des points M d'un demi-plan fermé de bord (AB) ($A \neq B$). $d(P, Q)$ désigne la distance euclidienne de deux points quelconques de E. On pose $x = d(A, M)$ et $y = d(B, M)$. A tout point M de E on associe le couple (x, y) de nombres réels positifs ou nuls ainsi définis. On obtient ainsi une application f de E dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
a) L'application f est-elle injective ?
b) L'application f est-elle surjective ? Trouver les relations qui caractérisent les couples (x, y) appartenant à $f(E)$ c'est-à-dire les couples qui sont des images des points de E; on posera $d(A, B) = l$.
c) Quels sont les points de E tels que $x = y$? $x < y$? Que peut-on dire des points M et M' dont les images respectives (x, y) et (x', y') sont telles que $x' = y$ et $y' = x$?

2.3 Le plan P étant rapporté à un repère cartésien, soit f l'application de P dans lui-même qui associe au point M (x, y) le point M' (x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Examiner si f est surjective, injective ou bijective

2.4 Le plan P étant rapporté à un repère cartésien, soit f l'application de P dans lui-même qui associe au point M (x, y) le point M' (x', y') tel que :

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

a) Examiner si f est surjective, injective ou bijective
b) Soit D la droite d'équation : $y = 2x$. Que peut-on dire de l'application g de P dans D qui associe à M (x, y) le point M' (x', y') défini par (1) ?

2.5 Le plan P étant rapporté à un repère cartésien, soit f l'application de P dans lui-même qui associe au point M (x, y) le point M' (x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

a) Examiner si f est surjective, injective ou bijective.
b) Trouver deux applications g et h de P dans P telle que $f = h \circ g$.

2.6 On considère les deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies pour tout x de $\mathbb{N}$ respectivement par :

$$f(x) = 2x, \qquad \begin{cases} g(x) = \dfrac{x}{2} \text{ si } x \text{ est pair,} \\[2mm] g(x) = \dfrac{x+1}{2} \text{ si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

a) Examiner si ces applications sont surjectives, injectives ou bijectives.
b) Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Étant donné deux fonctions numériques f et g de la variable réelle x, déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les cas suivants (ex. 2.7 à 2.10) :

2.7 $f(x) = x + 4$, $g(x) = x - 7$.

2.8 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2$.

2.9 $f(x) = 4x + 1$, $g(x) = x^2$

2.10 $f(x) = x - 1$, $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

2.11 Étant donnés les nombres réels a, b, c, d où $c \neq 0$ on considère l'application

$$f : x \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d} \text{ de } \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \text{ dans } \mathbb{R}.$$

a) En posant $x + \dfrac{d}{c} = X$, montrer que l'on peut toujours mettre $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = k + \frac{h}{x + \dfrac{d}{c}}.$$

b) Montrer que f est la composée des applications suivantes, prises dans cet ordre

$$x \longmapsto x + \frac{d}{c} \quad \text{de } \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \text{ dans } \mathbb{R}^*,$$

$$x \longmapsto \frac{h}{x} \quad \text{de } \mathbb{R}^* \text{ dans } \mathbb{R},$$

$$x \longmapsto x + k \quad \text{de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.$$

2.12 **Soit l'application** $f : x \longmapsto \dfrac{2x + 5}{x - 3}$ de $\mathbb{R} - \{3\}$ dans $\mathbb{R} - \{2\}$.

a) Montrer que f est bijective et trouver l'application réciproque f^{-1} de f.
b) En posant $x - 3 = X$, montrer que l'on peut mettre $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = k + \frac{h}{x - 3},$$

c) Soient les bijections $f_1 : x \longmapsto x - 3$ de $\mathbb{R} - \{3\}$ sur $\mathbb{R}^*$,

$$f_2 : x \longmapsto \frac{h}{x} \quad \text{de } \mathbb{R}^* \text{ sur } \mathbb{R}^*,$$

$$f_3 : x \longmapsto x + k \quad \text{de } \mathbb{R}^* \text{ sur } \mathbb{R} - \{k\}.$$

montrer que $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$
d) Montrer de la même manière que f^{-1} est la composée de trois bijections que l'on déterminera En déduire que $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1}$. Retrouver ce dernier résultat en appliquant les résultats du cours (cf § 2.4 b)

Montrer que les applications de E dans F sont bijectives et déterminer leurs applications réciproques (ex. 2.13 à 2.15) :

2.13 $x \longmapsto \dfrac{x + 1}{x - 2}$, $E = \mathbb{R} - \{2\}$, $F = \mathbb{R} - \{1\}$

2.14 $x \longmapsto 2 - x^2$ $E = \mathbb{R}_+$, $F =]-\infty, +2]$

2.15 $x \longmapsto \dfrac{x^2}{1 - x^2}$, E = [illegible], $F =]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$.

2.16 Dans le plan euclidien P, on donne une droite D et deux points A et B n'appartenant pas à D On suppose que la droite AB coupe D en O. Soit l'application f de $D - \{O\}$ dans $D - \{O\}$ qui associe à tout point M de $D - \{O\}$ le second point d'intersection de D et du cercle passant par A, B, M.

a) Montrer que f est une involution de $D - \{O\}$.
b) Définir f en cherchant une relation entre $\overline{OM}$ et $\overline{OM}'$.

2.17 Dans le plan euclidien P, on donne un point O et un nombre réel $k \neq 0$. Soit l'application f de $P - \{O\}$ dans $P - \{O\}$ qui associe à tout point M de $P - \{O\}$ le point M′ tel que

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k.$$

a) Montrer que f est une involution de $P - \{O\}$
b) Montrer que, si D est une droite passant par O, l'ensemble $D - \{O\}$ est globalement invariant par f

2.18 Dans le plan euclidien P, on donne un triangle $\alpha AA'$ et une droite Δ passant par α et coupant AA' en α_1 situé strictement entre A et A′. A tout point M du plan on associe un point M′ de ce plan de la manière suivante :
Par M on mène la parallèle à $A\alpha$, elle coupe Δ en μ; par μ on mène la parallèle à $\alpha A'$, elle coupe en M′ la parallèle menée par M à AA′.
a) Démontrer que l'application $M \longmapsto M'$ est une bijection de P sur lui-même
b) Trouver tous les points invariants par cette bijection.
c) Montrer qu'il existe une famille de droites parallèles toutes globalement invariantes par cette bijection.
d) La bijection considérée peut-elle être involutive ?

Sujets d'étude

2.19 On considère les deux applications f et g :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

a) Démontrer que si $g \circ f$ est injective, f l'est aussi, et que, si de plus f est surjective, alors g est injective.

b) Démontrer que si $g \circ f$ est surjective, g l'est aussi, et que, si de plus g est injective, alors f est surjective (pour montrer que g est surjective on raisonnera par l'absurde en montrant que $g(F) \neq G$ conduit à une contradiction avec l'hypothèse; pour montrer que f est surjective on montrera de même que $f(E) \neq F$ conduit à une contradiction avec l'hypothèse)

c) On suppose :

$$E = G \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Que peut-on dire de f et de g ?

d) On suppose :

$$E = G \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{id}_F.$$

Que peut-on dire de f et de g ?

2.20 Nous avons défini (cf. § 2.2 d'exemple 3) ce qu'on appelle fonction caractéristique f_A d'une partie A d'un ensemble E. Si A et B sont deux parties quelconques de E, nous avons calculé (cf. § 2.6) $f_{A \cap B}$, $f_{A \cup B}$, $f_{\bar{A}}$, f_{A-B}, $f_{A \Delta B}$ connaissant f_A et f_B et nous avons retrouvé, à l'aide de ces fonctions caractéristiques, quelques propriétés déjà rencontrées au chapitre précédent. Nous en proposons d'autres que l'on démontrera toujours à l'aide de ces fonctions caractéristiques.
a) Démontrer que, dans $\mathcal{P}(E)$, l'intersection est distributive par rapport à la différence (on montrera que si A, B, C sont trois parties quelconques de E, $f_{A \cap (B-C)} = f_{A \cap B - A \cap C}$)
b) Démontrer de même que :

$$(A - B) - C = A - (B \cup C)$$
$$(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D).$$

c) Démontrer que, dans $\mathcal{P}(E)$, la différence symétrique est associative.
En déduire que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe commutatif.
d) Démontrer que, dans $\mathcal{P}(E)$, l'intersection est distributive par rapport à la différence symétrique. En déduire que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif unitaire

3| Problèmes de dénombrement

Partant des propriétés de $(\mathbb{N}, +, \times, \leqslant)$ supposées connues, nous commençons par énoncer quelques résultats intuitifs très simples concernant les ensembles finis.
Cette introduction nous permet de traiter ensuite les problèmes de dénombrement du programme.

Nous supposons connues les propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels muni de l'addition, de la multiplication et de l'ordre naturel. Rappelons que si n et p sont deux entiers naturels tels que $n \leqslant p$, on pose

$$[n, p] = \{n, n+1, \ldots, p-1, p\}.$$

3.1 ENSEMBLES FINIS

a) Ensembles équipotents.

Étant donnés deux ensembles E et F s'il existe une bijection f de E sur F, il existe alors une bijection, à savoir f^{-1} de F sur E; nous dirons que les ensembles E et F sont **équipotents.**
Si E et F sont équipotents et s'il en est de même de F et G nous avons le schéma

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

où f et g sont des bijections : il en résulte que $g \circ f$ est une bijection de E sur G donc E et G sont équipotents.

b) Ensembles finis. Cardinal d'un ensemble fini.

Définition.
On dit qu'un ensemble E est **fini** s'il est vide ou bien s'il existe un entier naturel non nul n tel que E soit équipotent à $[1, n]$

On démontre que s'il existe une bijection de E sur $[1, n]$ et une bijection de E sur $[1, p]$ alors $n = p$.
Ce nombre n est appelé le **cardinal** de E, on écrit

$$\text{card } E = n.$$

D'après le sous-paragraphe *a* ci-dessus tout ensemble équipotent à E est aussi équipotent à $[1, n]$ et a donc même cardinal que E. *Le nombre n caractérise donc la classe de tous les ensembles équipotents* à $[1, n]$; d'un point de vue intuitif ce nombre n est le *nombre d'éléments* de l'un quelconque de ces ensembles. On complète la définition du cardinal d'un ensemble fini en posant

$$\text{card } \varnothing = 0.$$

Un ensemble *non fini* est appelé *infini*, par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont des ensembles infinis.

c) Propriétés des cardinaux des ensembles finis.

Les démonstrations des propriétés suivantes s'effectuent à l'aide des propriétés de $\mathbb{N}(+, \times, \leqslant)$, elles ne font pas partie du programme de la classe de Première. Nous admettrons donc les résultats suivants concernant les ensembles finis E, F de cardinaux respectifs n et p.

Théorème 1.

Étant donnés deux ensembles finis E et F :
si $E \subset F$ alors card E $\leqslant$ card F,
si ($E \subset F$ et $E \neq F$) alors card E $<$ card F

EXERCICE

1. A l'aide du théorème 1 démontrer que si ($E \subset F$ et card E = card F) alors E = F

Soit f une application de E fini dans F fini on a $f(E) \subset F$ donc (théorème 1)

$$\text{card } f(E) \leqslant \text{card } F$$

D'autre part nous admettrons que l'on a

$$\text{card } f(E) \leqslant \text{card } E.$$

Si f est *surjective* on a $f(E) = F$ donc card $f(E)$ = card F.
Si f est *injective*, l'application : E ⟶ $f(E)$ coïncidant avec f sur E est une bijection donc card E = card $f(E)$. Concluons

Théorème 2.

Étant donné une application f de E fini dans F fini
si f est *surjective* card E $\geqslant$ card f (E) = card F,
si f est *injective* card E = card f (E) $\leqslant$ card F,
si f est *bijective* card E = card f (E) = card F.

Nous admettrons que quels que soient les ensembles finis E et F on a

$$E \cap F = \varnothing \iff \text{card}(E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F.$$

Cette formule s'étend à des ensembles finis $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *deux à deux disjoints*

$$\text{card}(E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_n) = \text{card } E_1 + \text{card } E_2 + \ldots + \text{card } E_n.$$

En particulier si $E_1, \ldots, E_n$ constituent une *partition* de E (cf. cours de Seconde) on a

$$\text{card } E = \text{card } E_1 + \text{card } E_2 + \ldots + \text{card } E_n.$$

Si nous supposons maintenant que E et F sont finis mais ne sont pas forcément disjoints, on peut se ramener au cas précédent en remarquant que (fig. 1)

$$E \cup F = E \cup (F - E) \quad \text{avec} \quad E \cap (F - E) = \varnothing$$

on a donc

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card } E + \text{card}(F - E) \qquad (1)$$

De même nous avons

$$F = (F - E) \cup (E \cap F) \quad \text{avec} \quad (F - E) \cap (E \cap F) = \varnothing$$

d'où

$$\text{card } F = \text{card}(F - E) + \text{card}(E \cap F) \qquad (2)$$

Les relations 1 et 2 nous permettent d'écrire :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F - \text{card}(E \cap F).$$

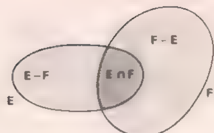


fig 1

Concluons

Théorème 3.

Quels que soient les ensembles finis E et F on a

$$\boxed{\text{Card}(E \cup F) + \text{card}(E \cap F) = \text{card } E + \text{card } F}.$$

EXERCICES

2. E, F, G étant trois ensembles finis, démontrer que :
card $(E \cup F \cup G)$ = card E + card F + card G − card $(E \cap F)$ − card $(F \cap G)$ − card $(G \cap E)$ + card $(E \cap F \cap G)$.

3. A et B étant deux parties d'un ensemble fini E, ayant pour complémentaires respectifs $\overline{A}$ et $\overline{B}$, démontrer que :
card E = card A + card $\overline{A}$
card E = card $(A \cap B)$ + card $(A \cap \overline{B})$ + card $(\overline{A} \cap B)$ + card $(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Nous admettrons enfin le résultat suivant.

Théorème 4.

Quels que soient les ensembles finis E et F on a
card $(E \times F)$ = (card E) (card F)

3. 2 NOMBRE D'APPLICATIONS D'UN ENSEMBLE FINI DANS UN ENSEMBLE FINI

a) Étude d'un exemple.

Raisonnons d'abord sur un exemple : $E = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $F = \{b_1, b_2\}$. Soit f une application de E dans F. On aura $f(a_1) = b_1$ *ou bien* $f(a_1) = b_2$. On peut schématiser ces deux cas par une figure à l'aide de deux traits (ou branches) partant de a_1 à côté desquels on a mis b_1 ou b_2 (fig. 2).

Si $f(a_1) = b_1$, on aura $f(a_2) = b_1$ *ou bien* $f(a_2) = b_2$ (schématisé par deux branches partant d'un point a_2 de la figure). Si $f(a_1) = b_2$ on aura $f(a_2) = b_1$ ou bien $f(a_2) = b_2$ (deux nouvelles branches)... Remarquons que les choix des images d'un élément quel-

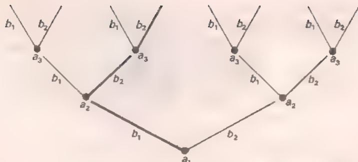


fig 2

conque de E sont *indépendants* les uns des autres. Le chemin en trait fort sur la figure 2 représente l'application f telle que :

$$f(a_1) = b_1, \quad f(a_2) = b_2, \quad f(a_3) = b_2.$$

Un tel schéma s'appelle l'*arbre des applications* de E dans F; à *tout chemin* est associé une *application unique* de E dans F et *toute application* de E dans F est associée à un *chemin unique*. Autrement dit, il existe une *bijection* de l'ensemble des chemins sur l'ensemble des applications de E dans F. Donc le nombre de ces applications est le nombre de ces chemins (cf. § 3. 1 b).

le nombre de branches partant de a est 2,
le nombre total de branches partant des points a_2 est 2×2,
le nombre total de branches partant des points a_3 est $(2 \times 2) \times 2 = 2^3$
Le nombre des applications de E dans F est donc $2^3 = 8$.

b) Cas général.

Soient $E_p = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ un ensemble de p éléments ($p \in \mathbb{N}^*$) et $F_n = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ un ensemble de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). Désignons par $\mathcal{F}(E_p, F_n)$ l'ensemble des applications de E_p dans F_n et par card $\mathcal{F}(E_p, F_n)$ le nombre d'éléments de $\mathcal{F}(F_p, F_n)$. Dans l'arbre des applications de E_p dans F_n :

le nombre de branches partant de a_1 est n,
le nombre total de branches partant des points a_2 est $n \times n$
plus généralement le nombre total de branches partant des points a_{q+1} sera le produit par n du nombre total de branches partant des points a_q, car on peut associer à a_{q+1} l'un des n éléments de F_n donc figurer n branches nouvelles après chacune des branches arrivant à chaque point a_q. Par conséquent pour q tel que $1 \leqslant q \leqslant p - 1$ on a

(1) $$\text{card } \mathcal{F}(E_{q+1}, F_n) = n \text{ card } \mathcal{F}(E_q, F_n).$$

Ce résultat a été acquis intuitivement en regardant l'arbre des applications de E_p dans E_n. Pour les lecteurs que cela intéresse voici une démonstration rigoureuse de ce résultat.

Si $p = 1$, il y a n applications de E_1 dans F_n ce sont les applications $f_1, f_2, \ldots, f_n$ définies respectivement par

$$f_1(a_1) = b_1, f_2(a_1) = b_2, \ldots, f_n(a_1) = b_n.$$

$\mathcal{F}(E_1, F_n)$ est donc fini et on a

$$\text{card } \mathcal{F}(E_1, F_n) = n.$$

Supposons que $\mathcal{F}(E_q, F_n)$ soit un ensemble fini ($1 \leqslant q \leqslant p - 1$).
Soit f' un élément quelconque de $\mathcal{F}(E_{q+1}, F_n)$, sa *restriction* à E_q est un élément : de $\mathcal{F}(E_q, F_n)$; donc f' est un *prolongement* à E_{q+1} d'un élément f de $\mathcal{F}(E_q, F_n)$.
Cherchons donc tous les prolongements f' à E_{q+1} de f application de E_q dans F_n on a

(I) $$\begin{cases} (\forall x \in E_q) \; f'(x) = f(x), \\ f'(a_{q+1}) \in F_n. \end{cases}$$

La valeur $f'(a_{q+1})$ peut être un élément quelconque de F_n. Donc chaque application f de E_q dans F_n donne naissance à n prolongements f', applications de E_{q+1} dans F_n
Ces n prolongements de f sont *distincts* : ils diffèrent par leur valeur pour a_{q+1}
Considérons deux applications f' et g' de E_{q+1} dans F_n, prolongements respectifs de *deux applications distinctes* f et g de E_q dans F_n. Il existe donc $a_i \in E_q$ tel que $f(a_i) \neq g(a_i)$, donc $f'(a_i) \neq g'(a_i)$ et f' et g' sont donc des applications distinctes
Concluons :
Tout élément de $\mathcal{F}(E_{q+1}, F_n)$ est un prolongement d'un élément de $\mathcal{F}(E_q, F_n)$.
Chaque élément de $\mathcal{F}(E_q, F_n)$ donne naissance à n prolongements à E_{q+1}, éléments de $\mathcal{F}(E_{q+1}, F_n)$.
Tous les prolongements obtenus sont distincts.
Il résulte de ces propriétés que $\mathcal{F}(E_{q+1}, F_n)$ est fini et que l'on a pour tout entier q tel que $1 \leqslant q \leqslant p - 1$:

(1) $$\text{card } \mathcal{F}(E_{q+1}, F_n) = n \text{ card } \mathcal{F}(E_q, F_n).$$

On peut écrire les égalités :

$$\begin{aligned} \text{card } \mathcal{F}(E_1, F_n) &= n, \\ \text{card } \mathcal{F}(E_2, F_n) &= n \text{ card } \mathcal{F}(E_1, F_n), \\ \text{card } \mathcal{F}(E_3, F_n) &= n \text{ card } \mathcal{F}(E_2, F_n), \\ &\ldots \\ \text{card } \mathcal{F}(E_p, F_n) &= n \text{ card } \mathcal{F}(E_{p-1}, F_n), \end{aligned}$$

en multipliant membre à membre ces p égalités et en simplifiant on obtient :

(2) $$\boxed{\text{card } \mathcal{F}(E_p, F_n) = n^p} \qquad (p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*)$$

Théorème.

Le nombre des applications d'un ensemble à $p \geqslant 1$ éléments dans un ensemble à $n \geqslant 1$ éléments est n^p

EXERCICES

1. On donne un système de trois inéquations du premier degré à deux inconnues en faisant suivre chacun des polynômes donnés
$$ax + by + c, \; a'x + b'x + c', \; a''x + b''y + c''$$
de l'un des signes < 0, > 0. Combien peut-on former de tels systèmes?
2. On jette sur une table cinq dés de couleurs différentes et on lit sur la face supérieure de chaque dé le nombre de points. Combien y a-t-il de lectures possibles?
3. Combien de numéros de téléphone à 7 chiffres peut-on former avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, un chiffre pouvant être répété jusqu'à 7 fois?

c) Nombre de parties d'un ensemble fini.

Soit A une partie d'un ensemble non vide E et F l'ensemble {0, 1}. On sait (cf. § 2.2 d, exemple 3) que l'application f_A de E dans F telle que

$$f_A(x) = 0 \quad \text{si } x \notin A,$$
$$f_A(x) = 1 \quad \text{si } x \in A,$$

s'appelle la *fonction caractéristique* de la partie A de E et qu'il existe une bijection de l'ensemble $\mathcal{P}$ (E) des parties de E sur l'ensemble de ces fonctions caractéristiques. Si E a p éléments ($p \in \mathbb{N}^*$), le nombre d'éléments de $\mathcal{P}$ (E) est égal alors au nombre des applications de E dans F, c'est-à-dire à 2^p.

Remarquons que ce résultat est encore vrai si $p = 0$, car E est l'ensemble vide, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ est formé d'un seul élément et on a bien $2^0 = 1$. Concluons :

Théorème.

Le nombre de parties de tout ensemble fini ayant p éléments ($p \in \mathbb{N}$) est 2^p

EXERCICE

4. On considère deux ensembles finis non vides E et F de cardinaux respectifs n et p. Combien y a-t-il de relations de E vers F? (Utiliser le résultat précédent et le théorème 4 du § 3. 1 c.)

3. 3 NOMBRE D'INJECTIONS D'UN ENSEMBLE FINI DANS UN ENSEMBLE FINI

Soient deux ensembles finis non vides $E_p = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ ayant $p \geqslant 1$ éléments et F_n $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ ayant $n \geqslant 1$ éléments. Soit f une injection de E_p dans F_n. Si $p > n$, l'ensemble $f(E_p)$ des images des éléments de E_p contient p éléments et ne peut être une partie de F_n, donc il n'y a pas d'injection de E_p dans F_n (cf. théorème 2, § 3. 1 c). Nous devons donc supposer $1 \leqslant p \leqslant n$.

a) Étude d'un exemple.

$E = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $F = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. On aura $f(a_1) = b_1$ ou bien $f(a_1) = b_2$ ou bien $f(a_1) = b_3$ ou bien $f(a_1) = b_4$ (schématisé sur la figure 3 par 4 branches partant de a_1). Mais si $f(a_1) = b_1$, on ne pourra plus prendre $f(a_2) = b_1$ puisqu'il s'agit d'une injection mais seulement $f(a_2) = b_2$ ou $f(a_2) = b_3$ ou $f(a_2) = b_4$ (schématisé par 3 branches

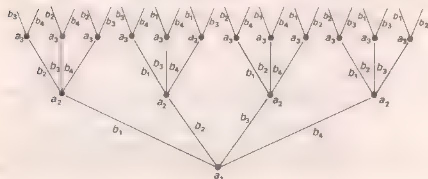


fig 3

partant d'un point a_2 de la figure). Si $f(a_1) = b_1$ et $f(a_2) = b_2$ on ne peut avoir que $f(a_3) = b_3$ ou $f(a_3) = b_4$ ...

Les choix ne sont plus indépendants comme au § 3. 2. Nous pouvons construire ce qu'on appelle l'arbre des injections de E dans F (fig. 3).

le nombre de branches partant de a_1 est 4,
le nombre total de branches partant des points a_2 est : 4×3,
le nombre total de branches partant des points a_3 est : $(4 \times 3) \times 2$.
Donc le nombre d'injections de E dans F est $4 \times 3 \times 2 = 24$.

b) Cas général.

Désignons par $\mathfrak{I}(E_p, F_n)$ l'ensemble des injections de E_p dans F_n ($1 \leqslant p \leqslant n$) et par card $\mathfrak{I}(E_p, F_n)$ le nombre de ces injections Dans l'arbre de ces injections,
le nombre de branches partant de a_1 est n
le nombre de branches partant des points a_2 est $n(n-1)$
et plus généralement le nombre total de branches partant des points a_{q+1} sera le produit par $(n-q)$ du nombre total de branches partant des points a_q ($1 \leqslant q \leqslant p-1$), car ayant associé à chacun des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_q$ un élément de F_n, on peut associer à a_{q+1} seulement l'un des $n - q$ éléments restant dans F_n donc figurer $n - q$ branches nouvelles après chacune des branches arrivant à chaque point a_q; par conséquent on a pour tout entier q tel que $1 \leqslant q \leqslant p-1$

$$\text{card } \mathfrak{I}(E_{q+1}, F_n) = (n-q) \text{ card } \mathfrak{I}(E_q, F_n).$$

Ce résultat a été acquis intuitivement en regardant l'arbre des injections de E_p dans F_n, voici pour les lecteurs que cela intéresse une démonstration rigoureuse de ce résultat.

Ici il est inutile de démontrer que $\mathfrak{I}(E_p, F_n)$ est fini, car cet ensemble est une partie de l'ensemble fini $\mathcal{F}(E_p, F_n)$.
Si $p = 1$, il y a n applications de E_1 dans E_n et ce sont toutes des injections, donc

$$\text{card } \mathfrak{I}(E_1, F_n) = n.$$

Supposons connu card $\mathfrak{I}(E_q, F_n)$ pour $1 \leqslant q \leqslant p-1$ et calculons card $\mathfrak{I}(E_{q+1}, F_n)$. Soit i' un élément quelconque de $\mathfrak{I}(E_{q+1}, F_n)$, *sa restriction* à E_q est une *injection* i de E_q dans F_n, c'est-à-dire un élément de $\mathfrak{I}(E_q, F_n)$, donc i' est un *prolongement injectif* à E_{q+1} de i élément de $\mathfrak{I}(E_q, F_n)$.
Cherchons donc tous les prolongements injectifs i' à E_{q+1} d'un élément i de $\mathfrak{I}(E_q, F_n)$, on a

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} (\forall x \in E_q) \quad i'(x) = i(x), \\ i'(a_{q+1}) \in F_n - i(E_q). \end{cases}$$

En effet i' étant un *prolongement injectif* de i la valeur $i'(a_{q+1})$ est un élément de F_n *distinct* de $i'(a_1) = i(a_1)$, $i'(a_2) = i(a_2)$, ..., $i'(a_q) = i(a_q)$. On notera la différence entre la condition (II) ci-dessus et la condition (I) du § 3. 2 b.
Donc chaque injection i de E_q dans F_n donne naissance à $n - q$ *prolongements injectifs* de i, injections de E_q dans F_n; car i étant injective et $i(E_q)$ étant une partie de F_n on a

$$\text{card } i(E_q) = q \text{ et card } (F_n - i(E_q)) = n - q.$$

Ces $n - q$ prolongements injectifs de i sont *distincts* : ils diffèrent par leur valeur pour a_{q+1}. Vous verrez sans peine que deux injections i' et j' de E_{q+1} dans F_n, prolongements respectifs de deux *injections distinctes* i et j de E_q dans F_n, sont distinctes.
On conclut que pour tout entier q tel que $1 \leqslant q \leqslant p-1$ on a

$$\text{card } \mathfrak{I}(E_{q+1}, F_n) = (n-q) \text{ card } \mathfrak{I}(E_q, F_n)$$

On peut donc écrire les égalités :

$$\text{card}\ \mathcal{J}(E_1, F_n) = n,$$
$$\text{card}\ \mathcal{J}(E_2, F_n) = (n-1)\ \text{card}\ \mathcal{J}(E_1, F_n),$$
$$\text{card}\ \mathcal{J}(E_3, F_n) = (n-2)\ \text{card}\ \mathcal{J}(E_2, F_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{card}\ \mathcal{J}(E_p, F_n) = [n-(p-1)]\ \text{card}\ \mathcal{J}(E_{p-1}, F_n);$$

en multipliant membre à membre ces p égalités et en simplifiant on obtient :

$$\boxed{\text{card}\ \mathcal{J}(E_p, F_n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)} \quad (1 \leqslant p \leqslant n).$$

Théorème.

Le nombre d'injections d'un ensemble ayant p éléments dans un ensemble ayant n éléments ($1 \leqslant p \leqslant n$) est $n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ (n-p+1)$.

On représente ce nombre d'injections de E_p dans F_n par le symbole A_n^p où n et p sont deux indices entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n$:

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)}.$$

EXERCICES

1. On donne n points distincts. Calculer le nombre de bipoints non nuls que l'on peut former avec ces n points. (On rappelle qu'un bipoint (A, B) est non nul si et seulement si $A \neq B$).
2. Quinze chevaux participent de bout en bout à une course. Dénombrer le nombre de tiercés dans l'ordre (on suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo).

3. 4 NOMBRE DE BIJECTIONS D'UN ENSEMBLE FINI E SUR UN ENSEMBLE ÉQUIPOTENT A E

Soient deux ensembles finis non vides E_n et F_n ayant le même nombre d'éléments n ($n \in \mathbb{N}^*$). Toute bijection de E_n sur F_n est une injection de E_n dans F_n et réciproquement (cf. § 3. 1 c). Donc le nombre de ces bijections s'obtient en faisant $p = n$ dans la formule obtenue au § 3. 3. Si l'on désigne par $\mathcal{B}(E_n, F_n)$ l'ensemble des bijections de E_n sur F_n on a :

$$\boxed{\text{card}\ \mathcal{B}(E_n, F_n) = n(n-1)\ldots 2.1} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Nous poserons la définition suivante :

Définition.

Étant donné un entier naturel n on désigne par $n!$, qui se lit « **factorielle** n » l'entier naturel défini par

$$0! = 1$$

et pour $n \geqslant 1$ par $n! = 1 . 2 \ldots n$.

L'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $n \longmapsto n!$ est strictement croissante pour $n \geqslant 1$, on a :

$$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ \ldots,\ 10! = 3\,628\,800$$

$20!$ a 19 chiffres dans le système décimal.

Le résultat de notre étude peut donc s'énoncer :

Théorème.

Le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à n éléments est $n!$

Rappelons qu'une bijection d'un ensemble E sur lui-même est appelée une permutation de E donc,

Corollaire.

Le nombre des permutations d'un ensemble E ayant n éléments est $n!$.

REMARQUE

La notation $n!$ nous permet d'écrire le nombre d'injections A_n^p d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments sous la forme

$$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n-p)\ldots 2.1}{(n-p)\ldots 2.1}$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Pour $n = p$ on trouve $\frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$, c'est le nombre de bijections de E_n sur F_n.

C'est en particulier pour assurer la validité de la formule ci-dessus pour $n = p$ que l'on a été amené à poser $0! = 1$.

EXERCICES

1. Combien de classements peut-on former avec trente élèves? (On suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo).
2. Combien peut-on former de mots avec toutes les lettres du mot ANDRÉ, chaque lettre étant utilisée une seule fois? Combien en existe-t-il commençant par une voyelle et finissant par une consonne?

3. 5 NOMBRE DE PARTIES AYANT p ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE FINI

Soit E un ensemble fini non vide ayant n éléments ($n > 0$). Désignons par $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E ayant p éléments ($p \leqslant n$); cherchons card $\mathcal{P}_p(E)$.

a) Calcul de card $\mathcal{P}_p(E)$.

Pour $p = 0$, il y a une seule partie, la partie vide $\varnothing$.
Supposons $p > 0$ et désignons par P l'ensemble

$$P = [1, p] = \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Si i est une injection de P dans E, $i(P)$ est une partie de E ayant p éléments (cf. § 3. 1 c) (fig. 4).

Toute partie $A \in \mathcal{P}_p(E)$ peut être obtenue comme image d'une injection i de P dans E, mais de plusieurs manières; A, élément de $\mathcal{P}_p(E)$, étant donné, cherchons le nombre d'injections i de P dans E telles que

$$i(P) = A.$$

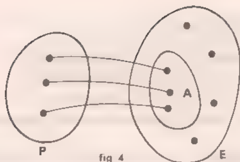


fig 4

A chacune de ces injections i est associée une bijection unique b de P sur A telle que pour tout x de P on ait $b(x) = i(x)$. *Il existe donc autant d'injections de* P *dans* E *telles que* $i(P) = A$ *que de bijections de* P *sur* A, c'est-à-dire $p!$ Par conséquent A est l'image de P par $p!$ injections distinctes, on a donc

$$\text{card } \mathcal{I}(P, E) = p! \text{ card } \mathcal{P}_p(E)$$

d'où

$$\text{card } \mathcal{P}_p(E) = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

EXEMPLE

Pour $n = 7$, $p = 3$ (cas de la figure 4) on a

$$\text{card } \mathcal{I}(P, E) = 7 \times 6 \times 5, \; p! = 3! = 6$$

d'où

$$\text{card } \mathcal{P}_3(E) = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35.$$

Remarquons que la formule s'applique pour $p = 0$, on retrouve $\frac{n!}{0!\,n!} = 1$. Cette formule s'applique même pour $n = p = 0$: l'ensemble vide admet lui-même pour seule partie.

Ce nombre est représenté par le symbole C_n^p ou encore par $\binom{n}{p}$ (notez la place des indices n et p dans les deux symboles)

Théorème.

Le nombre des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments ($0 \leqslant p \leqslant n$) est

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

On dit quelquefois qu'une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments est une **combinaison sans répétition de n éléments, p à p.**

EXERCICES

1. On donne n points distincts, trois quelconques d'entre eux n'étant pas alignés. Calculer le nombre de segments ayant pour extrémités deux de ces points, puis le nombre de triangles ayant pour sommet trois de ces points.
2. Quinze chevaux participent de bout en bout à une course. Dénombrer le nombre de tiercés dans le désordre. (On suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo.) Comparer au résultat de l'exercice 2 du § 3. 3.

b) Propriétés des nombres C_n^p

Rappelons que, quel que soit l'entier naturel n, on a $C_n^0 = C_n^n = 1$.

La formule donnant C_n^p montre que $C_n^{n-p} = C_n^p$

Cette formule est également évidente en remarquant que si $A \subset E$ a p éléments alors $\complement_E A = \overline{A}$ a $n - p$ éléments et que l'application

$$f : \mathcal{P}_p(E) \longrightarrow \mathcal{P}_{n-p}(E)$$
$$A \longmapsto \overline{A}$$

est une bijection. Donc $\mathcal{P}_p(E)$ et $\mathcal{P}_{n-p}(E)$ ont même cardinal.
D'autre part à titre d'exercice vous vérifierez la formule suivante (cf. également exercice 3 ci-dessous) valable quels que soient n et p vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n - 1$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

Cette formule jointe à $C_n^0 = C_n^n = 1$ permet de calculer facilement de proche en proche les nombres C_n^p. On obtient le tableau ci-dessous appelé triangle de PASCAL (fig. 5).

n \ p	0	1	2	3	4		$p-1$	p		$n-1$	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
$p-1$	1	$p-1$					1				
p	1	p					p	1			
$n-1$	1	$n-1$					C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^{p}		1	
n	1	n						C_n^p			1

fig 5

REMARQUE

Vous constaterez que a et b étant des nombres réels on a

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b,$$
$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2,$$
$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$

On démontre que ces résultats s'étendent au développement de $(a+b)^n$ (formule du binôme) (cf. ex. 3.22); d'où le nom de **coefficients binomiaux** donnés aux nombres C_n^p.

EXERCICES

3. Dans E ayant $n \geqslant 1$ éléments on distingue un élément a.
Calculer le nombre de parties de E à p éléments comprenant a et le nombre de parties de E à p éléments ne comprenant pas a. En déduire la formule
$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$
4. A quoi est égal le nombre
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n ?$$



EXERCICES

Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini : ex. 1-2-3.

Nombre de parties d'un ensemble fini : ex. 4.

Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini : ex. 5-6.

Nombre de bijections d'un ensemble fini sur un autre : ex. 7-8-9-20.

Nombre de parties ayant p éléments d'un ensemble fini : ex. 9-10-11-12-13-14-16-21-22.

Nombre d'applications surjectives, non surjectives d'un ensemble fini dans un autre : ex. 18-19.

Les exercices 15 et 17 portent sur plusieurs parties du cours.

3.1 Dénombrer les différentes façons de mettre 6 boules de couleurs différentes dans 3 tiroirs.

3.2 Combien de mots de 6 lettres peut-on former avec les lettres A, B, E, une lettre pouvant être répétée jusqu'à 6 fois ?

3.3 Pierre, Jacques, Louis, Henri que nous désignerons respectivement par P, J, L, H doivent voter par oui ou par non. Construire l'arbre des applications de $E = \{P, J, L, H\}$ dans l'ensemble $F = \{O, N\}$ des réponses « oui », « non ». Dénombrer les résultats de vote possibles.
Si les quatre personnes précédentes doivent voter en donnant une et une seule des réponses : oui, non, abstention, dénombrer les résultats de vote possibles

3.4 On pose $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\Delta = \{(x, y) \in E \times E \mid x = y\}$$
$$G = \{(x, y) \in E \times E \mid x \leqslant y\}.$$

a) Trouver le nombre d'éléments de $E \times E$, le nombre de relations binaires de E vers E.
b) Démontrer qu'une relation réflexive, dans E, est déterminée par la donnée d'une partie de $E \times E - \Delta$. En déduire le nombre de relations réflexives dans E.
c) Démontrer qu'une relation symétrique, dans E, est déterminée par la donnée d'une partie de G. En déduire le nombre de relations symétriques dans E.

3.5 Combien d'équipes de football peut-on constituer avec 16 personnes ? (une équipe est composée de 11 joueurs).

3.6 Combien de mots (assemblages de lettres placées les unes à côté des autres sans qu'ils aient nécessairement une signification) peut-on former avec 3 lettres du mot ANDRÉ ? Combien de mots de 3 lettres, commençant par l'une des 2 voyelles, existe-t-il ?

3.7 Une pièce doit passer par quatre machines A, B, C, D. Dénombrer les trajets possibles dans l'un des cas suivants :
a) l'ordre de passage est indifférent.
b) la pièce doit passer d'abord par A.
c) la pièce doit passer en B avant C et D.

3.8 Huit convives sont invités à s'asseoir autour d'une table où huit sièges sont prévus. Combien y a-t-il de dispositions possibles distinctes de ces huit personnes occupant chacune un siège ?

3.9 On considère un groupe de 7 personnes et un ensemble de 7 cartes. On veut distribuer au hasard une carte à chaque membre de ce groupe. Combien y a-t-il de distributions possibles distinctes ?
Même question avec un groupe de 4 personnes et un jeu de 32 cartes quand on distribue au hasard 8 cartes à chaque joueur (réponse : $C_{32}^8 C_{24}^8 C_{16}^8$).

3.10 Quatre joueurs veulent jouer aux dominos, chacun recevant sept dominos au hasard. Combien y a-t-il de distributions possibles distinctes ? (réponse : $C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7$).

3.11 Calculer le nombre de segments, de triangles que l'on peut former avec n points distincts (on suppose que trois quelconques de ces n points ne sont pas alignés, que chaque segment a ses deux extrémités distinctes et que chaque triangle a ses trois sommets distincts).

3.12 Une assemblée de 16 personnes veut désigner une délégation de 3 personnes parmi ses membres. Dénombrer les délégations possibles.

3.13 Quinze chevaux sont au départ d'une course. Dénombrer les tiercés possibles dans le désordre (on suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo).

3.14 De combien de manières peut-on choisir, dans un jeu de 32 cartes, 5 cartes contenant :
a) exactement 1 roi ?
b) Au moins 1 roi ?
c) Exactement 1 roi et 2 dames ?
d) Exactement 1 roi, 1 dame et 2 valets ?

3.15 On dispose d'un jeu de 52 cartes ordinaires. Combien de « mains » différentes de 13 cartes peut-on constituer dans les cas suivants :
a) Elles contiennent les quatre as.
b) Elles contiennent exactement un as.

c) Elles contiennent au moins un as.
d) Elles contiennent l'as de pique et cinq trèfles exactement.
e) Elles contiennent l'as de pique et au moins deux trèfles.
f) Elles contiennent exactement six cartes d'une couleur, quatre d'une autre, deux d'une autre, une d'une autre.

3.16 Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

$$C_n^3 - C_n^2 = \frac{n^3 - 6n^2}{6} + 5$$

$$\frac{C_n^5}{C_n^4} = 17, \qquad \frac{C_n^4}{C_n^2} = 13; \qquad C_{2n+4}^{3n-1} = C_{2n+4}^{n^2-2n+3}$$

3.17 On jette trois dés. Dans les 5 premières questions on suppose que des résultats tels que, par exemple, 143 ou 431 ou 314 sont différents (il en est ainsi si les trois dés sont de couleurs différentes ou encore si l'on jette un dé, puis un autre, puis le troisième).
a) Dénombrer tous les résultats possibles.
b) Dénombrer les résultats comportant un seul 4.
c) Dénombrer les résultats comportant exactement deux 4.
d) Dénombrer les résultats ne comportant aucun 4.
e) Dénombrer les résultats formés de trois chiffres différents.
f) Comment sont modifiées les réponses précédentes si l'on suppose que des résultats tels que, par exemple, 143 ou 431 ou 314 sont identiques (il en est ainsi par exemple si l'on adopte comme résultat le plus grand total qui est, sur l'exemple donné, 431).

3.18 Dénombrer les applications *surjectives* de $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ sur $F = \{b_1, b_2\}$.

3.19 Dénombrer les applications *non surjectives* d'un ensemble de n éléments dans lui-même.

Sujets d'étude

3.20 Soit l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, b_1, b_2, \ldots, b_\beta, \ldots, l_1, l_2, \ldots, l_\lambda\}$ $(\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n)$
a) Dénombrer les permutations de cet ensemble.
b) En déduire le nombre de mots de n lettres contenant exactement α lettres a, β lettres b, ..., λ lettres l $(\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n)$.
(On remarquera, par exemple, que si l'on dispose de trois lettres a et de deux lettres b, le mot *abaab* peut provenir de $a_1b_1a_2a_3b_2$ ou de $a_2b_2a_3a_1b_1$ ou de $a_3b_1a_1a_2b_2$ ... auxquels on a enlevé les indices).
c) Dénombrer les numéros de téléphone de 7 chiffres contenant exactement deux fois le chiffre 2, une fois le chiffre 3, une fois le chiffre 4, trois fois le chiffre 5.

3.21 On donne dans le plan n droites sécantes deux à deux, trois quelconques d'entre elles n'étant pas concourantes.
a) Calculer le nombre de points d'intersection de ces droites et le nombre de triangles qu'elles déterminent.
b) On se propose de calculer le nombre de régions du plan qu'elles déterminent, ces régions étant des ensembles de points disjoints deux à deux.
1) Soit u_p le nombre de régions déterminées par p droites $(1 \leqslant p \leqslant n - 1)$. Quand on trace la $(p + 1)^e$ droite, de combien d'unités le nombre de régions augmente-t-il? En déduire la relation entre u_p et u_{p+1}.
2) Écrire toutes les relations obtenues de $p = 1$ à $p = n - 1$. En déduire que :

$$u_n = 1 + (1 + 2 + \ldots + n)$$

3) Soit à calculer :

$$S = 1 + 2 + \ldots + n$$

que l'on peut écrire :

$$S = n + (n - 1) + \ldots + 1$$

en additionnant membre à membre ces deux égalités et en associant chaque fois les termes qui sont l'un au-dessus de l'autre, calculer S.
En déduire u_n.
c) Vérifier les résultats trouvés en faisant des figures pour $n = 3$ et pour $n = 4$.

3.22 *a*) Lorsqu'on effectue le produit $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n)$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ étant des éléments quelconques d'un anneau commutatif, on obtient une somme de termes de la forme :

$$\varpi = a_1a_2b_3a_4b_5 \ldots a_{n-1}b_n,$$

obtenus en prenant soit a_1 soit b_1 dans la première parenthèse, soit a_2 soit b_2 dans la deuxième parenthèse, ..., soit a_n soit b_n dans la $n^{ième}$ parenthèse.
Combien y a-t-il de termes analogues à ϖ dans lesquels figurent p fois la lettre a (et par conséquent $n - p$ fois la lettre b), p étant un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$?
b) En faisant $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b$ et en faisant varier l'entier p de 0 à n, en déduire le développement de $(a + b)^n$ *(formule du binôme de Newton)*.
c) En donnant à a et b des valeurs réelles simples, dans la formule précédente, calculer les sommes :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^p + \ldots + C_n^n$$
$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^p C_n^p + \ldots + (-1)^n C_n^n$$
$$C_n^0 + 2\,C_n^1 + 2^2\,C_n^2 + \ldots + 2^p\,C_n^p + \ldots + 2^n\,C_n^n.$$

d) Calculer les sommes :

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots,$$

le dernier terme étant C_n^n ou C_n^{n-1} suivant que n est pair ou impair;

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots,$$

le dernier terme étant C_n^{n-1} ou C_n^n suivant que n est pair ou impair.





Fonction numérique d'une variable réelle : Continuité et limites

---

Dans ce chapitre nous commençons par rappeler les propriétés de la relation d'ordre $x \leqslant y$ dans $\mathbb{R}$.
Une série d'exemples et de contre-exemples nous permet de dégager la notion de **continuité** *en x_0 pour les fonctions numériques dont l'ensemble de définition contient un intervalle ouvert non vide de centre x_0.*
Ensuite une fonction f définie sur un intervalle ouvert de centre x_0, sauf peut-être en x_0, étant donnée, la **limite** *l de f en x_0, si elle existe, est définie comme valeur qu'il faudrait donner à la fonction en x_0 pour obtenir une nouvelle fonction qui, elle, serait continue en x_0.*
Le chapitre se termine par l'énoncé des théorèmes sur les limites et par les extensions diverses de la notion de limite.

---

4. 1 PROPRIÉTÉS DE LA RELATION $x \leqslant y$ DANS $\mathbb{R}$. (RAPPELS)

a) Relation $x \leqslant y$ dans $\mathbb{R}$.

Nous savons que la relation $x \leqslant y$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, nous avons en effet quels que soient x, y, z de $\mathbb{R}$,

$$(x \leqslant y \quad \text{et} \quad y \leqslant x) \Longleftrightarrow (x = y),$$
$$(x \leqslant y \quad \text{et} \quad y \leqslant z) \Longrightarrow (x \leqslant z).$$

De plus quels que soient x et y de $\mathbb{R}$ on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$: la relation considérée est donc une **relation d'ordre total**.
La relation $y \leqslant x$ *réciproque* de la relation $x \leqslant y$ est une relation d'ordre notée $x \geqslant y$; on a donc quels que soient x et y de $\mathbb{R}$:

$$x \geqslant y \Longleftrightarrow y \leqslant x.$$

La relation $x \leqslant y$ (resp. $x \geqslant y$) se lit « x est *inférieur* (resp *supérieur*) *ou égal* à y » ou encore « x est *inférieur* (resp. *supérieur*) à y *au sens large* » ou le plus souvent :

« x est inférieur (resp. supérieur) à y ».

D'autre part nous savons que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un **corps commutatif**

EXERCICE

Rappeler les neuf propriétés fondamentales de $(\mathbb{R}, +, \times)$ (axiomes de la structure de corps commutatif)

De plus il existe deux propriétés qui « relient » l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ à la relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$ Quels que soient x, y, z de $\mathbb{R}$ on a :

(OA) $\quad (x \leqslant y) \Longrightarrow (x + z \leqslant y + z)$,
(OM) $\quad (0 \leqslant x \text{ et } 0 \leqslant y) \Longrightarrow (0 \leqslant xy)$;

on exprime ces propriétés en disant que la *relation d'ordre $x \leqslant y$ est compatible respectivement avec l'addition et la multiplication dans* $\mathbb{R}$. On dit encore que $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un **corps totalement ordonné.**

Enfin la relation ($x \leqslant y$ et $x \neq y$) se note $x < y$ qui se lit « x est *strictement inférieur* à y » ou « y est *strictement supérieur* à x ».
Étant donné deux ou plusieurs nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le plus petit et le plus grand de ces nombres sont respectivement représentés par les symboles

$$\inf(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \sup(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ainsi si $a \leqslant b$ on a :

$$\inf(a, b) = a, \quad \sup(a, b) = b.$$

Il résulte de ces définitions que l'on a :

$$|x| = \sup(x, -x).$$

Rappelons que quels que soient x, y, z, de $\mathbb{R}$ on a :

$$|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$$
$$|xy| = |x| . |y| ,$$
$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

b) Intervalles.

Rappelons les notations suivantes ($a \leqslant b$) :

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (intervalle fermé ou segment)
2. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle ouvert)
3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
4. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$,
5. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$,
6. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$,
7. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$,
8. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$.

Pour les quatre dernières notations, les symboles $+\infty$ (plus l'infini) et $-\infty$ (moins l'infini) ne désignent pas des nombres réels; ils n'ont d'autre signification que de permettre l'extension d'une écriture commode. Ainsi on peut écrire aussi

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[.$$

Il existe des bijections de $\mathbb{R}$ sur toute droite, aussi il nous arrivera d'employer pour $\mathbb{R}$ un langage géométrique : Au lieu de dire « *soit le nombre réel x_0* » nous dirons « *soit le point x_0* ». Ainsi l'intervalle fermé $[a, b]$ sera souvent appelé *segment* d'extrémités a et b.
De même $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$ sont appelées *demi-droites fermées* et $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$, *demi-droites ouvertes.*

c) Intervalles centrés; intervalles pointés.

Nous aurons souvent à considérer des intervalles de la forme

$$]x_0 - h, x_0 + h[\quad \text{avec} \quad h > 0;$$

il s'agit d'un intervalle ouvert, non vide (car $x_0 - h \neq x_0 + h$); de plus on a $x_0 = \dfrac{(x_0 - h) + (x_0 + h)}{2}$, nous dirons que x_0 est son *centre*.

Dans ce chapitre chaque fois que nous dirons : I est un *intervalle de centre* x_0, il s'agira d'un *intervalle ouvert, non vide de centre* x_0.
Nous aurons également à considérer des parties de $\mathbb{R}$ de la forme

$$]x_0 - h, x_0 + h[- \{x_0\} \quad \text{avec} \quad h > 0;$$

nous appellerons une telle partie un *intervalle pointé de centre* x_0 : c'est donc l'ensemble des points d'un intervalle ouvert, non vide, de centre x_0 et dont on a retiré le centre. On peut encore noter un tel intervalle pointé $]x_0 - h, x_0[\cup]x_0, x_0 + h[$.
Notons que quels que soient les nombres réels x, x_0 de $\mathbb{R}$ et h de $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$|x - x_0| < h \Longleftrightarrow x_0 - h < x < x_0 + h \Longleftrightarrow x \in]x_0 - h, x_0 + h[$$

et

$$0 < |x - x_0| < h \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0 - h < x < x_0 + h \\ \text{et } x \neq x_0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in]x_0 - h, x_0 + h[- \{x_0\}$$

I. Continuité en un point. Limite en un point

4. 2 PREMIERS EXEMPLES

Exemple 1. Soit la fonction affine : $f : x \longmapsto 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
On sait que sa représentation graphique est une droite (figure 1).

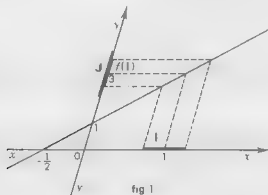


fig 1

Étudions $f(x)$ pour x « voisin » de 1, par exemple; on a $f(1) = 3$. La figure nous montre que $f(x)$ sera aussi « voisin » de $f(1) = 3$ que l'on voudra, si l'on choisit x suffisamment « voisin » de 1. Plus précisément on aura, par exemple,

$$|f(x) - f(1)| < 10^{-3} \text{ si } |2x + 1 - 3| < 10^{-3}$$

ou encore si $|x - 1| < \frac{10^{-3}}{2}$.

On peut écrire pour tout x de $\mathbb{R}$

$$|x - 1| < \frac{10^{-3}}{2} \Longrightarrow |f(x) - f(1)| < 10^{-3}.$$

On aurait de même pour tout x de $\mathbb{R}$

$$|x - 1| < \frac{10^{-4}}{2} \Longrightarrow |f(x) - f(1)| < 10^{-4}.$$

Interprétons la première implication en posant

$$I = \left]1 - \frac{10^{-3}}{2}, 1 + \frac{10^{-3}}{2}\right[, \quad J =]f(1) - 10^{-3}, f(1) + 10^{-3}[$$

nous avons

$$x \in I \Longrightarrow f(x) \in J.$$

Nous nous sommes *donné* l'intervalle J de centre $f(1)$ et nous avons *trouvé* un intervalle I tel que

$$f(I) \subset J$$

Exemple 2. Soit la fonction $f : x \longmapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$,
si $x \geqslant 0$ $f(x) = x$,
si $x \leqslant 0$ $f(x) = -x$.

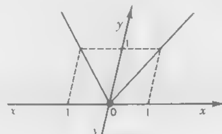


fig 2

La représentation graphique de f (figure 2) est la réunion de deux demi-droites fermées d'origine 0. Là encore la figure nous montre que $f(x)$ sera aussi « voisin » de $f(0) = 0$ que l'on voudra si l'on choisit x suffisamment « voisin » de 0. Plus précisément puisque $f(x) = |x|$, on peut écrire pour tout x réel

$$|x| < 10^{-3} \Longrightarrow |f(x)| < 10^{-3}$$

ou encore par analogie avec l'exemple précédent :

(1) $$|x - 0| < 10^{-3} \Longrightarrow |f(x) - f(0)| < 10^{-3};$$

de même

$$|x - 0| < 10^{-4} \Longrightarrow |f(x) - f(0)| < 10^{-4}.$$

EXERCICE

1. Interpréter l'implication (1) à l'aide d'un intervalle de centre $f(0)$ et d'un intervalle de centre 0.

Considérons la fonction numérique f_0 définie pour tout x de $\mathbb{R}^*$ par $f_0(x) = \frac{x^2}{|x|}$, on a

$$\text{si} \quad x > 0 \quad f_0(x) = x,$$
$$\text{si} \quad x < 0 \quad f_0(x) = -x$$

La fonction f_0 *n'est pas définie pour* 0, nous remarquons d'ailleurs que f_0 est la restriction de f à $\mathbb{R}^*$.

La représentation graphique de f_0 est la réunion des deux demi-droites *ouvertes* d'origine 0 de la figure 2. La fonction f_0 n'est pas définie pour $x = 0$, on peut cependant écrire

(2) $$0 < |x - 0| < 10^{-3} \Longrightarrow |f_0(x) - 0| < 10^{-3}$$

de même

$$0 < |x - 0| < 10^{-4} \Longrightarrow |f_0(x) - 0| < 10^{-4}.$$

autrement dit $f_0(x)$ peut être aussi « voisin » de 0 que l'on veut si l'on choisit x suffisamment « voisin » de 0, *sans que x soit égal à* 0. Observons que dans (1) on a écrit $|x - 0| < 10^{-3}$ alors que dans (2) on a écrit $0 < |x - 0| < 10^{-3}$ Dans (1) on a écrit $|f(x) - f(0)| < 10^{-3}$ alors que dans (2) on a écrit $|f_0(x) - 0| < 10^{-3}$.

Exemple 3. Si x est un nombre réel quelconque, il existe un entier relatif n tel que $n \leqslant x < n + 1$. Cet entier relatif s'appelle la partie entière de x que nous désignerons par E (x).

Soit la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{E}(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ et appelée *fonction partie entière*, on a par exemple

$$\text{si} \quad -1 \leqslant x < 0 \quad \mathrm{E}(x) = -1,$$
$$\text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \quad \mathrm{E}(x) = 0,$$
$$\text{si} \quad 1 \leqslant x < 2 \quad \mathrm{E}(x) = 1,$$
$$\text{si} \quad 2 \leqslant x < 3 \quad \mathrm{E}(x) = 2 \quad .$$

La représentation graphique de f est la réunion de segments parallèles à $x'x$, les extrémités de gauche de ces segments (représentées par un gros point sur la figure 3) font partie de la représentation graphique alors que les extrémités de droite n'en font pas partie.

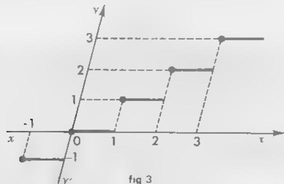


fig 3

Quand x décrit $\mathbb{R}$ en croissant, chaque fois que x passe une valeur entière, le point figuratif $(x, f(x))$ *saute* d'un segment au segment suivant. Prenons par exemple $x_0 = 2$ et considérons les valeurs de x telles que $|x - 2| < 1$ nous aurons

$$\text{si} \quad x < 2 \quad f(x) = 1,$$
$$\text{si} \quad 2 \leqslant x \quad f(x) = 2.$$

Pour tout intervalle $]2 - h, 2 + h[= \mathrm{I}$ avec $0 < h < 1$ on a $f(\mathrm{I}) = \{1, 2\}$, donc si nous nous donnons un intervalle J de centre $f(2) = 2$, par exemple

$$\mathrm{J} = \left]f(2) - \frac{1}{2}, f(2) + \frac{1}{2}\right[,$$

il est impossible de trouver un intervalle I de centre 2 tel que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

Exemple 4. Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{2x^2 + |x|}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, on a

$$\text{si} \quad x > 0 \quad f(x) = \frac{2x^2 + x}{x} = 2x + 1,$$
$$\text{si} \quad x < 0 \quad f(x) = \frac{2x^2 - x}{x} = 2x - 1$$

La représentation graphique de la fonction f est la réunion de deux demi-droites ouvertes donc à l'exclusion des points A et B que nous avons encerclés (figure 4).

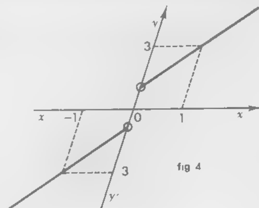


fig 4

Nous remarquons encore que, quand x décrit $\mathbb{R}^*$ le point figuratif « saute » d'une demi-droite à l'autre lorsque x franchit 0; pour x « voisin » de 0, $f(x)$ est « voisin » de 1 ou -1 suivant que $x > 0$ ou $x < 0$. Par ailleurs n'oublions pas que f n'est pas définie pour $x = 0$. Plus précisément pour tout $x > 0$ on a $|f(x) - 1| < 10^{-3}$ si $|2x + 1 - 1| < 10^{-3}$, c'est-à-dire si $x < \frac{10^{-3}}{2}$, autrement dit on a pour tout $x > 0$:

$$0 < x < \frac{10^{-3}}{2} \Longrightarrow |f(x) - 1| < 10^{-3},$$

de même

$$0 < x < \frac{10^{-4}}{2} \Longrightarrow |f(x) - 1| < 10^{-4}$$

Pour tout $x < 0$ on a $|f(x) - (-1)| < 10^{-3}$ si $|2x - 1 + 1| < 10^{-3}$, c'est-à-dire si $|x| < \frac{10^{-3}}{2}$, autrement dit on a pour tout $x < 0$:

$$-\frac{10^{-3}}{2} < x < 0 \Longrightarrow |f(x) - (-1)| < 10^{-3},$$

de même

$$-\frac{10^{-4}}{2} < x < 0 \Longrightarrow |f(x) - (-1)| < 10^{-4},...$$

EXERCICE

2. Quelle est l'image $f(I')$ de l'intervalle pointé $I' =]-h, h[- \{0\}$ où $h > 0$? Étant donné l'intervalle J de centre 0 $J = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ existe-t-il un intervalle pointé I' de centre 0 tel que $f(I') \subset J$?

Nous avons étudié un certain nombre de situations de manière intuitive en considérant les représentations graphiques et en utilisant des expressions telles que « x est voisin de a », or le sens mathématique de telles expressions n'a pas été précisé. Nous allons maintenant donner dans les paragraphes suivants des définitions qui nous permettront de décrire de manière mathématique les situations rencontrées.

4. 3 FONCTION CONTINUE EN UN POINT

a) Introduction.

Dans l'exemple 1 du paragraphe précédent on s'est *donné* un nombre $\alpha > 0$, 10^{-3}, 10^{-4} ... et on a *cherché* x pour que l'on ait

$$|f(x) - f(1)| < \alpha,$$

pour $\alpha = 10^{-3}$ on a *trouvé* $\beta = \frac{10^{-3}}{2} > 0$ tel que pour tout x de $\mathbb{R}$

(1) $$|x - 1| < \beta \Longrightarrow |f(x) - f(1)| < \alpha$$

ou encore *étant donné* un intervalle (ouvert, non vide) J de centre $f(1)$ on a *trouvé* un intervalle (ouvert, non vide) I de centre 1 tel que $f(I) \subset J$.

EXERCICE

1. Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ trouver $\beta \in \mathbb{R}_+$ pour que la fonction $x \longmapsto 2x + 1$, étudiée au point $x = 1$, vérifie (1).

On a trouvé un résultat analogue pour la fonction $f : x \longmapsto |x|$ de l'exemple 2, étudiée au point 0. Nous dirons que ces fonctions sont *continues* au point étudié.

Nous remarquons que ces fonctions sont *définies pour le point* x_0 étudié, mais aussi qu'il existe un intervalle de centre x_0, $]x_0 - h, x_0 + h[$ avec $h > 0$, contenu dans leur ensemble de définition. Dans la suite lorsque nous dirons **f est définie sur un intervalle de centre x_0** cela signifiera que si D est son ensemble de définition il existe $h > 0$ tel que

$$]x_0 - h, x_0 + h[\subset D.$$

Pour la fonction de l'exemple 3 qui est définie sur un intervalle de centre $x_0 = 2$ nous ne pouvons pas toujours *étant donné* $\alpha > 0$, *trouver* $\beta > 0$ tel que

(2) $$|x - 2| < \beta \Longrightarrow |f(x) - f(2)| < \alpha,$$

quant aux autres fonctions étudiées au § 4. 2 elles ne sont pas définies pour x_0.
Nous allons donner une définition qui va nous permettre de caractériser la situation présentée par les fonctions

$$x \longmapsto 2x + 1 \quad \text{au point } x_0 = 1$$
$$x \longmapsto |x| \quad \text{au point } x_0 = 0$$

par rapport aux situations présentées par tous les autres cas étudiés.

b) Définition de la continuité d'une fonction en un point.

Définition.

Une fonction f définie sur un intervalle de centre x_0 est continue en x_0 si et seulement si quel que soit l'intervalle J de centre $f(x_0)$ il existe un intervalle I de centre x_0 tel que $f(I) \subset J$

REMARQUE

Rappelons que par intervalle de centre x_0 nous entendons intervalle ouvert, non vide de centre x_0 et par fonction définie sur un intervalle de centre x_0 une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle ouvert non vide de centre x_0.

Donc quel que soit $J =]f(x_0) - \alpha, f(x_0) + \alpha[$, c'est-à-dire *quel que soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $I =]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$, c'est-à-dire il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $f(I) \subset J$; donc quel que soit $x \in I$, on a $f(x) \in J$, cette situation est représentée à la figure 5. La propriété de continuité en un point peut donc s'écrire en utilisant des quantificateurs

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in]x_0 - \beta, x_0 + \beta[) \quad |f(x) - f(x_0)| < \alpha.$$

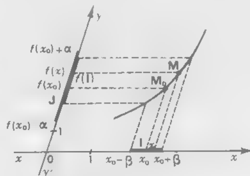


fig 5

La fonction f et le nombre x_0 étant donnés dans cet énoncé, les lettres α, β, x sont des *lettres muettes*. Notez bien l'ordre dans lequel sont écrits les quantificateurs. Notons aussi que *c'est* α *qui est donné arbitrairement* alors que β *est cherché* et son *existence* est affirmée, la valeur β trouvée dépend de α

On peut aussi énoncer

La fonction f est continue en x_0 si et seulement si quel que soit $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que tout x réel on ait

$$|x - x_0| < \beta \implies |f(x) - f(x_0)| < \alpha$$

Comme nous l'avons fait pour les exemples 1 et 2 du § 4. 2, c'est souvent sous cette forme que l'on démontre la continuité de f en x_0.

REMARQUES

1. Les intervalles $I =]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$ et $J =]f(x_0) - \alpha, f(x_0) + \beta[$ déterminent le parallélogramme (cotés exclus) $I \times J$; comme $f(I) \subset J$, dès que $|x - x_0| < \beta$ on est sûr que le point $M(x, f(x))$ appartient au parallélogramme $I \times J$ (fig. 5).
2. Ayant trouvé $\beta > 0$, donc $I =]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$ tel que $f(I) \subset J$, si on prend β' tel que $0 < \beta' < \beta$, l'intervalle $I' =]x_0 - \beta', x_0 + \beta'[$ vérifie encore $f(I') \subset J$ car $I' \subset I$ donc $f(I') \subset f(I)$ (voir cours de Seconde). Étant donné $\alpha > 0$ la condition trouvée relative à x, soit $|x - x_0| < \beta$, est donc une *condition suffisante* (et non pas une condition nécessaire et suffisante) pour que l'on ait $|f(x) - f(x_0)| < \alpha$.

EXEMPLES

1. Soit la fonction $f: x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est continue pour $x_0 = 2$ par exemple, on a $f(2) = 4$. Donnons-nous arbitrairement un nombre réel $\alpha > 0$; nous cherchons à avoir

   (1) $$|x^2 - 4| < \alpha.$$

   Pour tout x on a $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$.
   Si $|x - 2| < 1$ on a $-1 < x - 2 < 1$ ou encore
   $$3 < x + 2 < 5,$$
   donc pour x vérifiant $|x - 2| < 1$ on a
   $$|x^2 - 4| = |x + 2||x - 2| < 5|x - 2|.$$
   Donc pour avoir (1) il suffit d'avoir
   $$|x - 2| < 1 \text{ et } 5|x - 2| < \alpha;$$
   il suffit donc de prendre $\beta = \inf\left(1, \frac{\alpha}{5}\right)$ qui est bien un nombre réel strictement positif la fonction étudiée est continue au point 2.
2. Soit la fonction $f: x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrons qu'elle est continue pour $x_0 = 3$ par exemple; on a $f(3) = \frac{1}{3}$ Donnons-nous arbitrairement $\alpha > 0$; nous cherchons à avoir

   (2) $$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \alpha.$$

   Pour tout x réel on a
   $$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \frac{|x - 3|}{3|x|}.$$
   Si $|x - 3| < 1$, c'est-à-dire $-1 < x - 3 < 1$ ou encore $2 < x < 4$, nous aurons donc $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ et par conséquent :
   $$\frac{|x - 3|}{3|x|} < \frac{|x - 3|}{6}.$$
   Pour avoir (2) il suffit donc d'avoir
   $$|x - 3| < 1 \quad et \quad \frac{|x - 3|}{6} < \alpha.$$
   Il suffit donc de prendre $\beta = \inf(1, 6\alpha)$: la fonction f est continue pour $x = 3$

Ces exemples montrent la méthode employée pour avoir $|f(x) - f(x_0)| < \alpha$. Comme nous cherchons seulement une condition $|x - x_0| < \beta$ suffisante pour que l'on ait $|f(x) - f(x_0)| < \alpha$, on peut, dans cette recherche, remplacer $|f(x) - f(x_0)|$ par un nombre plus grand, on dit que l'on *majore* $|f(x) - f(x_0)|$; alors si ce nombre est inférieur à α il en sera de même a fortiori de $|f(x) - f(x_0)|$. Comme dans les deux exemples précédents on s'efforce de choisir convenablement $h > 0$ de manière qu'il existe $k > 0$ tel que

$$|f(x) - f(x_0)| < k|x - x_0|$$

pour avoir $|f(x) - f(x_0)| < \alpha$ il suffira alors de prendre $\beta = \inf\left(h, \frac{\alpha}{k}\right)$

Aux § 4. 9 et 4. 10 nous énoncerons des résultats qui nous permettrons de démontrer sans calculs la continuité de nombreuses fonctions.

EXERCICES

Soit la fonction f qui associe à tout nombre réel x le nombre suivant, quand il existe :

1. $f(x) = 1 + x + |x|$; construire la représentation graphique de f et montrer que f est continue au point $x = 0$.
2. $f(x) = |x| + |x + 2|$; construire la représentation graphique de f et montrer que f est continue aux points $x = -2$ et $x = 0$.
3. $f(x) = x^2 + x + 1$; montrer que f est continue au point $x = 1$ (remarquer que $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$).
4. $f(x) = x^2 + x + 2$; montrer que f est continue au point $x = 0$ (remarquer que $|x^2 + x| \leqslant x^2 + |x|$ et que si $|x| < 1$ on a $x^2 + |x| < 2|x|$).
5. $f(x) = x^2 - 5x + 4$; montrer que f est continue au point $x = 1$
6. $f(x) = x^3 - 3x$; — — $x = 0$
7. $f(x) = x^3 + 2$; — — $x = 1$
8. $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$; — — $x = 2$

4. 4 FONCTION DISCONTINUE EN UN POINT

Soit une fonction f définie sur un intervalle de centre x_0. On dit qu'elle est *discontinue* au point x_0 ou qu'elle présente une *discontinuité* au point x_0 si elle n'est pas continue au point x_0.

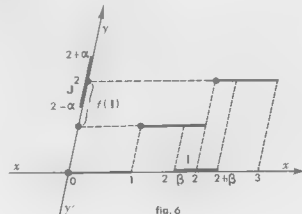


fig. 6

Reprenons par exemple la fonction $f : x \longmapsto E(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ (cf § 4.2 exemple 3); elle est discontinue au point $x_0 = 2$. (On s'assurera qu'il en est de même pour toutes les valeurs entières de x)

Choisissons α tel que $0 < \alpha < 1$. *Quel que soit* l'intervalle $I =]2 - \beta, 2 + \beta[$, $(\beta > 0)$, de centre $x_0 = 2$ il *existe* des nombres x de I tels que

$$|f(x) - f(2)| \geqslant \alpha.$$

En effet sur la représentation graphique (fig. 6) on voit que, quel que soit I, $f(I)$ comprend 1 qui est extérieur à $J =]f(2) - \alpha, f(2) + \alpha[$. Nous avons donc prouvé l'assertion suivante

(1) $\quad (\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*)(\forall \beta \in \mathbb{R}_+^*)(\exists x \in]2 - \beta, 2 + \beta[)\ |f(x) - f(2)| \geqslant \alpha,$

qui signifie que f est discontinue au point $x_0 = 2$.
Nous vérifions sur cet exemple que cette assertion est la négation de

(2) $\quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in]2 - \beta, 2 + \beta[)\ |f(x) - f(2)| < \alpha$

qui exprime que f est continue en $x_0 = 2$.
Observez bien la place des quantificateurs.

EXERCICES

1. Soient la fonction f en escalier sur $[1,4]$ définie par :

$$f(x) = 2 \quad \text{si} \quad 1 < x < 2,$$
$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad 2 < x < 3,$$
$$f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad 3 < x < 4,$$

et par $f(1) = 5$, $f(2) = 2$, $f(3) = 0$, $f(4) = \frac{1}{2}$.
Faire la représentation graphique de f.
Étudier si f est continue ou discontinue aux points 2, 3.

2. Soit la fonction $f : x \longmapsto x - E(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
Faire la représentation graphique de f.
Quelles sont les discontinuités de f?

REMARQUE

Nous avons défini la continuité d'une fonction f en x_0 en supposant qu'il existe $h > 0$ tel que $]x_0 - h, x_0 + h[$ soit contenu dans l'ensemble de définition D de f; la question de la continuité de f ne peut donc se poser que si f est définie pour x_0.
Ainsi la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie dans $\mathbb{R}^*$; quel que soit $h > 0$ elle est définie sur $]-h, 0[$ et $]0, h[$ mais pas pour $x = 0$; par conséquent la question de savoir si elle est continue ou discontinue pour $x = 0$ ne se pose pas.

4.5 FONCTION ADMETTANT UNE LIMITE EN UN POINT

a) Introduction.

Exemple 1. Revenons aux deux fonctions f et f_0 étudiées à l'exemple 2 du § 4.2

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_0 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x| \qquad x \longmapsto \frac{x^2}{x}$$

La fonction f est continue pour $x = 0$.

La fonction f_0 est définie sur tout intervalle pointé de centre 0, par exemple sur $]-h, h[- \{0\}$ $(h > 0)$, mais pas pour $x_0 = 0$. Nous avons cependant pour tout x de $\mathbb{R}$

$$0 < |x - 0| < 10^{-3} \Longrightarrow |f_0(x) - 0| < 10^{-3}$$
$$0 < |x - 0| < 10^{-4} \Longrightarrow |f_0(x) - 0| < 10^{-4}$$

Si nous construisons la fonction g de la manière suivante

$$\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}^*) & g(x) = f_0(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons une fonction continue au point 0 : la fonction g n'est autre que la fonction f. Nous dirons que 0 est la limite de f_0 au point $x_0 = 0$.

Exemple 2. Considérons la fonction f définie pour tout x de la manière suivante :

$$\begin{cases} x < 3 & f(x) = x + 1 \\ x > 3 & f(x) = 2(5 - x) \\ & f(3) = 2 \end{cases}$$

et dont la représentation graphique est donnée à la figure 7.

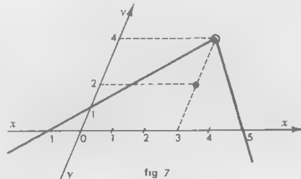


fig 7

Pour x « voisin » de 3 et $x < 3$, f prend des valeurs « voisines » de 4, pour x « voisin » de 3 et $x > 3$, f prend aussi des valeurs voisines de 4, mais $f(3) = 2 \neq 4$. D'une manière précise *étant donné* $\alpha > 0$, *cherchons* $\beta > 0$ tel que

(1) $\quad 0 < |x - 3| < \beta \Longrightarrow |f(x) - 4| < \alpha$

Pour $x < 3$ nous devons avoir :

$$|x + 1 - 4| = |x - 3| < \alpha,$$

et pour $x > 3$ nous devons avoir :

$$|2(5 - x) - 4| = |6 - 2x| = 2|x - 3| < \alpha,$$

c'est-à-dire $|x - 3| < \frac{\alpha}{2}$; en prenant $\beta = \inf\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$ nous aurons (1).

Considérons la fonction g définie par

$$\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}) & g(x) = f(x), \\ g(3) = 4, \end{cases}$$

nous voyons que, $\alpha > 0$ étant donné, il existe $\beta > 0$ $\left(\beta = \frac{\alpha}{2}\right)$ tel que pour tout x on ait

$$(2) \qquad |x - 3| < \beta \longrightarrow |g(x) - g(3)| < \alpha$$

donc g est continue pour 3.

En changeant convenablement uniquement la valeur de f au point 3 nous obtenons une fonction continue pour 3; nous dirons que la valeur convenable que nous avons pu choisir, soit 4, est la limite de f au point 3.

Exemple 3. Considérons la fonction f de l'exemple 4 du § 4. 2 (fig. 4), définie sur $\mathbb{R}^*$.

On a
$$\begin{cases} x < 0 & f(x) = 2x - 1, \\ x > 0 & f(x) = 2x + 1. \end{cases}$$

Nous avons vu que l'on a par exemple pour tout x de $\mathbb{R}^*$

$$0 < x < \frac{10^{-3}}{2} \longrightarrow |f(x) - 1| < 10^{-3},$$

$$-\frac{10^{-3}}{2} < x < 0 \longrightarrow |f(x) - (-1)| < 10^{-3}.$$

Quel que soit le nombre k choisi la fonction g, définie par

$$\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}^*) & g(x) = f(x), \\ g(0) = k, \end{cases}$$

ne sera pas continue pour $x_0 = 0$ parce que, en considérant l'intervalle $I =]-\beta, \beta[$ $(\beta > 0)$, $g(I)$ comprend des valeurs > 1 et des valeurs < -1. Donc si on considère $J =]k - \alpha, k + \alpha[$ avec $0 < \alpha < 1$ on a $k + \alpha - (k - \alpha) = 2\alpha < 2$ et il est impossible que $g(I) \subset J$. Nous dirons que f n'a pas de limite au point 0.

EXERCICE

1. On considère la fonction $x \longmapsto E(x)$ (exemple 3 du § 4. 2). Démontrer que g définie par

$$\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}) & g(x) = E(x), \\ g(2) = k \end{cases}$$

n'est pas continue pour $x_0 = 2$ quelle que soit la valeur k choisie. En déduire que la fonction $x \longmapsto E(x)$ n'a pas de limite pour $x = 2$, il en est d'ailleurs de même pour toutes les valeurs entières de x.

b) Définition de la limite.

Explicitons la situation présentée dans les exemples 1 et 2 ci-dessus mais non présentée dans l'exemple 3 et l'exemple de l'exercice.

Soit une fonction numérique $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ possédant en x_0 les deux propriétés suivantes :

1. La fonction f est définie sur un intervalle de centre x_0, *sauf peut-être en x_0*, donc sur un *intervalle pointé* de centre x_0.
2. Il existe un nombre réel l tel que la fonction g, définie par

$$\begin{cases} (\forall x \in D - \{x_0\}) & g(x) = f(x), \\ g(x_0) = l, \end{cases}$$

soit continue en x_0.

On dit alors que la fonction f a une *limite l au point x_0*. D'où :

Définition.

Une fonction f définie sur un intervalle pointé de centre x_0 admet la **limite** l au point x_0 si et seulement si, quel que soit l'intervalle J de centre l, il existe un intervalle pointé I' de centre x_0 tel que $f(I') \subset J$.

Cette définition peut s'écrire à l'aide de quantificateurs

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x \in]x_0 - \beta, x_0 + \beta[- \{x_0\}) \qquad |f(x) - l| < \alpha.$$

On peut également dire f admet l pour limite au point x_0 si et seulement si étant donné $\alpha > 0$ on peut trouver $\beta > 0$ tel que, quel que soit x réel on ait

$$0 < |x - x_0| < \beta \longrightarrow |f(x) - l| < \alpha.$$

On écrira

$$\lim_{x_0} f = l.$$

Lorsque f a une limite en x_0 on dit aussi que *f tend vers l lorsque la variable x tend vers x_0* et on utilise également les notations

$$\lim_{x \to x_0} f = l, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

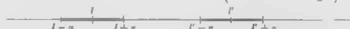
REMARQUES

1. Observons bien cette définition et celle d'une fonction continue en un point. Nous avons écrit ici $0 < |x - x_0| < \beta$ au lieu de $|x - x_0| < \beta$ et $|f(x) - l| < \alpha$ au lieu de $|f(x) - f(x_0)| < \beta$. Ici *la valeur de f en x_0 n'intervient pas*. D'où le résultat suivant :
   Soient deux fonctions f_1 et f_2 *prenant les mêmes valeurs en tout point d'un intervalle pointé de centre x_0*, ou bien toutes deux définies en x_0 avec $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$, ou bien l'une étant définie en x_0, l'autre pas; si l'une de ces fonctions a une limite l en x_0, l'autre a la même limite en x_0.
2. Si l'on emploie l'expression « *f tend vers l, lorsque x tend vers x_0* » on ne peut dissocier les deux affirmations « f tend vers l », « lorsque x tend vers x_0 », chacune de ces affirmations prises séparément n'a pas de signification

c) Premières propriétés des limites.

Montrons que si f admet une limite l au point x_0, cette limite est unique. Supposons qu'au point x_0 une fonction f ait deux limites distinctes l et l', $l < l'$ pour fixer les idées.

Choisissons $\alpha > 0$ de manière que les intervalles $]l - \alpha, l + \alpha[$ et $]l' - \alpha, l' + \alpha[$ soient disjoints. Pour cela il suffit que $l + \alpha < l' - \alpha$ $\left(\text{c'est-à-dire } \alpha < \frac{l' - l}{2}\right)$



Le nombre α étant ainsi choisi, il existe un nombre β strictement positif tel que : $0 < |x - x_0| < \beta \longrightarrow |f(x) - l| < \alpha$ et il existe un nombre β' strictement positif tel que : $0 < |x - x_0| < \beta' \longrightarrow |f(x) - l'| < \alpha$. Soit alors $\beta'' = \inf(\beta, \beta')$, pour tout x vérifiant $0 < |x - x_0| < \beta''$ on aurait simultanément $|f(x) - l| < \alpha$ et $|f(x) - l'| < \alpha$ c'est-à-dire encore

$$l - \alpha < f(x) < l + \alpha \qquad \text{et} \qquad l' - \alpha < f(x) < l' + \alpha$$

ce qui est impossible puisque les intervalles $]l - \alpha, l + \alpha[$ et $]l' - \alpha, l' + \alpha[$ sont disjoints. Donc

Si f admet une limite au point x_0 cette limite est unique.

Supposons que f admette en x_0 une limite $l \neq 0$. Supposons par exemple $l > 0$, choisissons α tel que $0 < \alpha < l$, alors on a $0 < l - \alpha < l + \alpha$; il existe $\beta > 0$ tel que

$$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow 0 < l - \alpha < f(x) < l + \alpha.$$

c'est-à-dire

$$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow l f(x) > 0$$

2. Démontrer le même résultat pour $l < 0$.

Concluons :

Si en x_0 la fonction f admet une *limite non nulle l*, il existe un intervalle pointé I' de centre x_0, tel que pour tout x de I', $f(x)$ et l soient de même signe.

4. 6 CONTINUITÉ EN UN POINT ET LIMITE EN UN POINT

a) Limite et continuité.

Si f est continue en x_0, $\alpha > 0$ étant donné il existe $\beta > 0$ tel que pour tout x

(1) $$|x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha.$$

Si cette implication est vraie il en est de même a fortiori de l'implication

(2) $$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha,$$

donc pour une fonction continue en x_0 on a

$$\lim_{x \to x_0} f = f(x_0)$$

Réciproquement si f est définie sur un intervalle de centre x_0 (donc définie pour x_0) et si f a pour limite $f(x_0)$ en x_0 on aura (2) et également (1) car pour $x = x_0$, $|f(x) - f(x_0)| = 0$. Concluons :

Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle a une limite en x_0 et si cette limite est $f(x_0)$

Il en résulte donc du sous-paragraphe *c*) ci-dessus le résultat suivant :

Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ il existe un intervalle I de centre x_0 tel que pour tout x de I les nombres $f(x_0)$ et $f(x)$ soient de même signe.

b) Prolongement d'une fonction par continuité.

Soit f la fonction

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie sur un intervalle pointé de centre x_0, mais pas en x_0 et admettant une limite l en x_0

$$\lim_{x \to x_0} f = l.$$

Considérons la fonction g

$$g : D \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\begin{cases} \forall x \in D & g(x) = f(x), \\ & g(x_0) = l; \end{cases}$$

cette fonction g est continue en x_0 car

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

La fonction g est un prolongement de f à $D \cup \{x_0\}$; on dit que g est le **prolongement par continuité** de f en x_0.

EXEMPLES

1. On a vu que la fonction $f_0 : x \longmapsto \frac{x^2}{|x|}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ a une limite, qui est 0, au point $x = 0$. Pour $x \neq 0$, $f_0(x) = |x|$, la fonction $f : x \longmapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ est le prolongement par continuité de la fonction f_0 en 0 puisque
$$f(0) = \lim_{x \to 0} f_0 = \lim_{x \to 0} f = 0.$$

2. Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$. Cherchons sa limite si elle existe, au point $x = 1$.
En remarquant que $2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$, on peut écrire lorsque $x \neq 1$:
$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 1)$$
Montrons que
$$\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$$
Donnons-nous $\alpha > 0$ et cherchons x tel que $|2x + 1 - 3| < \alpha$, c'est-à-dire $2|x - 1| < \alpha$; on trouve donc $\beta = \frac{\alpha}{2}$ tel que pour tout x :
$$0 < |x - 1| < \beta \Longrightarrow |2x + 1 - 3| < \alpha.$$
Donc la fonction g, définie pour tout x par
$$\begin{cases} \text{si } x \neq 1 & g(x) = f(x) = 2x + 1, \\ \text{et} & g(1) = 3, \end{cases}$$
est telle que
$$\lim_{x \to 1} g(x) = g(1)$$
elle est continue pour $x = 1$; c'est le prolongement par continuité de f en $x = 1$.

EXERCICES

Soit la fonction f qui associe à tout nombre réel x le nombre suivant, quand il existe :

1. $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$, calculer $\lim_{x \to a} f$ et trouver le prolongement de f par continuité en a.
2. $f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$, calculer $\lim_{x \to 1/2} f$ et trouver le prolongement de f par continuité en $\frac{1}{2}$
3. $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 4}{x + 1}$, calculer $\lim_{x \to -1} f$ (on posera $x = -1 + h$) et trouver le prolongement de f par continuité en -1.

4. 7 COMPLÉMENTS

a) Limite à gauche, limite à droite.

Reprenons l'exemple 4 du § 4. 2; soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$

$$f : x \longmapsto \frac{2x^2 + |x|}{x}$$

$$\text{si} \quad x > 0 \quad f(x) = 2x + 1$$
$$\text{si} \quad x < 0 \quad f(x) = 2x - 1.$$

La représentation graphique de f est la réunion de deux demi-droites ouvertes (fig. 4). Le comportement de f est différent suivant que x est « voisin » de 0 avec $x < 0$ ou que x est « voisin » de 0 avec $x > 0$ et cela se traduit par un « saut » du point $(x, f(x))$. De plus ici f n'est pas définie pour $x = 0$. Nous avons vu que :

$$0 < x - 0 < \frac{10^{-3}}{2} \Longrightarrow |f(x) - 1| < 10^{-3},$$
$$0 < x - 0 < \frac{10^{-4}}{2} \Longrightarrow |f(x) - 1| < 10^{-4}.$$
$$\ldots$$

On dit que f a pour limite 1 à droite au point 0 ou que f tend vers 1 quand x tend vers 0 à droite.

Nous avons de même pour $x < 0$

$$-\frac{10^{-3}}{2} < x - 0 < 0 \Longrightarrow |f(x) - (-1)| < 10^{-3},$$
$$-\frac{10^{-4}}{2} < x - 0 < 0 \Longrightarrow |f(x) - (-1)| < 10^{-4}.$$
$$\ldots$$

On dit, dans ce cas, que f a pour limite -1 à gauche au point 0, ou que f tend vers -1 quand x tend vers 0 à gauche.

Dans l'exemple précédent il existe $h > 0$ tel que f soit définie sur $]x_0, x_0 + h[$; nous dirons que *f est définie à droite de x_0*.

De même la fonction f est définie sur $]x_0 - h, x_0[$ $(h > 0)$; nous dirons que *f est définie à gauche de x_0*.

D'une manière générale nous énoncerons :

Définition.

On dit qu'une fonction f définie à droite de x_0 a une **limite l à droite** au point x_0 ou que f tend vers l quand x tend vers x_0 à droite si et seulement si, quel que soit le nombre réel strictement positif α, il est possible de trouver un nombre réel strictement positif β tel que pour tout nombre réel x on ait

$$0 < x - x_0 < \beta \Longrightarrow |f(x) - l| < \alpha.$$

Avec les symboles usuels l'existence d'une limite l à droite de x_0 s'écrit :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in]x_0, x_0 + \beta[) \quad |f(x) - l| < \alpha.$$

On emploie l'un des symboles suivants :

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f = l, \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = l$$

De même f, définie à gauche de x_0, a une limite l à gauche au point x_0 si et seulement si on a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in]x_0 - \beta, x_0[) \quad |f(x) - l| < \alpha,$$

on emploie l'un des symboles suivants :

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f = l, \qquad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = l$$

REMARQUES

1. On démontre que cette limite à droite (ou à gauche), quand elle existe, est unique (dans le raisonnement fait au § 4. 5 c sur l'unicité de la limite, remplacer $0 < |x - x_0| < \beta$ par $0 < x - x_0 < \beta$ ou par $-\beta < x - x_0 < 0$).
2. Pour qu'une fonction admette une limite en un point il faut et il suffit qu'elle admette en ce point des limites à droite et à gauche égales.

EXERCICE

1. Soit $f : x \longmapsto \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x - 1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

   Chercher les limites à droite et à gauche pour $x = 1$.

b) Continuité à gauche, continuité à droite.

Reprenons l'exemple 3 du § 4. 2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \longrightarrow E(x)$$
$$\text{si} \quad 1 \leqslant x < 2 \quad E(x) = 1,$$
$$\text{si} \quad 2 \leqslant x < 3 \quad E(x) = 2,$$

Ici le comportement de f est différent suivant que x est « voisin » de 2 avec $x > 2$ ou que x est « voisin » de 2 avec $x < 2$ et cela se traduit par un « saut » du point $(x, f(x))$ dans la représentation graphique (fig. 3).

On peut écrire pour tout nombre réel x :

$$0 < x - 2 < 1 \Longrightarrow f(x) = f(2)$$

ou encore, α étant un nombre réel strictement positif donné à l'avance :

$$0 < x - 2 < 1 \Longrightarrow |f(x) - f(2)| < \alpha$$

nous avons donc

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = f(2)$$

nous dirons que f est continue à droite pour $x = 2$. D'une manière générale

Définitions.

On dit qu'une fonction f définie en x_0 et à droite de x_0 est **continue à droite** en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f = f(x_0),$$

de même f définie pour x_0 et à gauche de x_0 est **continue à gauche** en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f = f(x_0).$$

REMARQUE

3. Il résulte de ces deux définitions que pour qu'une fonction soit continue au point x_0 il faut et il suffit qu'elle soit continue à droite et à gauche au point x_0.

EXERCICES

2. Écrire que f est continue à droite (resp. à gauche) pour x_0 en utilisant des quantificateurs.
3. Écrire que f est continue à droite (resp. à gauche) en utilisant les intervalles $J =]f(x_0) - \alpha, f(x_0) + \alpha[$ et $I = [x_0, x_0 + \beta[$ (resp. $I =]x_0 - \beta, x_0]$) avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
4. Démontrer que f définie pour tout $x \leqslant 1$ par $f(x) = \sqrt{1-x}$ est continue à gauche au point 1.

c) Continuité sur un intervalle.

Soit I l'un des intervalles de la forme

$$]a, b[, \ ]a, +\infty[, \ ]-\infty, a[, \ \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[,$$

on dit que f **est continue sur** I si et seulement si f est continue pour tout point x de I.

Soit l'intervalle fermé ou segment

$$S = [a, b], \quad (a < b)$$

on dit que f **est continue sur l'intervalle fermé** S si et seulement si :

1. f est continue pour tout x tel que $a < x < b$.
2. f est continue à droite pour $x = a$.
3. f est continue à gauche pour $x = b$.

EXERCICE

5. Donner la définition d'une fonction continue sur $[a, +\infty[$ puis sur $]-\infty, a]$.

4. 8 UN EXERCICE RÉSOLU

Considérons la fonction numérique f définie sur $[-1, +1]$ de la manière suivante :

1. *Pour tout entier naturel non nul n*

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad \textit{si n est pair,}$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \qquad \textit{si n est impair.}$$

2. *Pour tout entier naturel non nul n, f coïncide sur* $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ *avec une fonction affine* (*c'est-à-dire* $f(x) = ax + b$).
3. *La fonction f est paire sur* $[-1, +1]$ (*c'est-à-dire que pour tout x de* $[-1, +1]$ *on a* $f(-x) = f(x)$)
4. *Enfin* $f(0) = 0$.

Il est impossible de dessiner toute la représentation graphique de la fonction f; cependant la figure 8 donne une idée de cette représentation graphique. Remarquons que, quel que soit x de $[-1, +1]$ on a

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

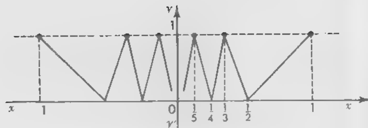


fig.8

Étudions la fonction f au point $x = 0$; on a $f(0) = 0$. Soit I un intervalle $]-h, h[$ où $0 < h < 1$. On peut trouver un entier naturel p tel que

$$0 < \frac{1}{2p-1} < h,$$

il suffit de prendre $2p - 1 > \frac{1}{h}$, c'est-à-dire $p > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h} + 1\right)$; par exemple si $h = 10^{-3}$, il suffit de prendre $p > 501$. On aura donc

$$0 < \frac{1}{2p} < \frac{1}{2p-1} < h$$

Sur $\left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right]$ f coïncide avec une *fonction affine strictement croissante* de $f\left(\frac{1}{2p}\right) = 0$ à $f\left(\frac{1}{2p-1}\right) = 1$ (fig. 8) on a donc

$$f\left(\left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right]\right) = [0, 1]$$

Or on a

$$\left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right] \subset]-h, h[= I$$

donc

$$[0, 1] = f\left(\left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right]\right) \subset f(I).$$

Comme, pour tout x de $[-1, +1]$, $f(x)$ appartient à $[0, 1]$ il en résulte que $f(I) \subset [0, 1]$, donc

$$f(I) = [0, 1],$$

et ceci quel que soit l'intervalle $I =]-h, h[$ $(0 < h < 1)$ choisi; il en résulte que *f n'est pas continue au point* 0, car quel que soit $J =]-\alpha, \alpha[$ $(\alpha > 0)$ on ne pourra pas trouver I tel que $f(I) \subset J$, il suffit, par exemple, de prendre $\alpha = \frac{1}{2}$.

Cet exemple plus délicat que ceux que nous avons rencontrés jusqu'à présent nous permet de comprendre mieux plusieurs choses.

D'abord on ne peut pas dire que, lorsque x traverse 0 en croissant, $f(x)$ « *saute* » d'une valeur à une autre, lorsque x tend vers zéro la fonction oscille une infinité de fois entre 0 et 1. Il en résulte que *f n'a pas de limite* lorsque *x tend vers zéro.* Donc si nous prenions une fonction g coïncidant avec f sur $[-1, +1] - \{0\}$ et prenant la valeur k $(0 \leqslant k \leqslant 1)$ pour $x = 0$, quel que soit k ainsi choisi, g n'a pas de limite au point 0 et donc n'est pas continue pour $x = 0$. Nous voyons ainsi que la notion intuitive de « saut » n'est pas aussi simple qu'elle peut paraître au premier abord.

D'autre part quel que soit le nombre réel λ, tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, dans tout intervalle $]-h, h[$, avec $0 < h < 1$, il existe des valeurs de x telles que $f(x) = \lambda$.

EXERCICE

Trouver les fonctions affines qui coïncident avec f respectivement sur

$$\left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right] \quad \text{et sur} \quad \left[\frac{1}{2p+1}, \frac{1}{2p}\right].$$

En déduire les valeurs x_p et x'_p telles que

$$\frac{1}{2p} \leqslant x_p \leqslant \frac{1}{2p-1} \qquad f(x_p) = \lambda \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1),$$

$$\frac{1}{2p+1} \leqslant x'_p \leqslant \frac{1}{2p} \qquad f(x'_p) = \lambda \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

Il en résulte que si x varie en croissant de $-\frac{1}{2p}$ à $\frac{1}{2p+1}$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f\left(-\frac{1}{2p}\right) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2p+1}\right) = 1$. La fonction f étudiée est définie sur $\left[-\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p+1}\right]$, elle prend toute valeur entre $f\left(-\frac{1}{2p}\right) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2p+1}\right) = 1$, mais elle n'est pas continue sur $\left[-\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p+1}\right]$ puisqu'elle n'est pas continue pour $x = 0$.

II. Opérations sur les limites et sur les fonctions continues en un point.

Nous avons défini (§ 2. 5) l'addition et la multiplication des fonctions numériques ainsi que la multiplication d'une fonction numérique par un nombre réel.
Soient des fonctions numériques d'une variable réelle ayant une limite en un point x_0 ou étant continues en x_0. Nous allons étudier la limite ou la continuité des fonctions obtenues par les opérations précédentes
Nous considérons ensuite le cas des fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{f}{g}$, après avoir étudié la possibilité de leur définition.

4. 9 SOMME ET PRODUIT DE FONCTIONS AYANT UNE LIMITE OU CONTINUES EN x_0

Conformément au programme nous admettrons les résultats suivants.

Théorème.

Étant donné deux fonctions f et g ayant chacune une limite en x_0 et un nombre réel λ, les fonctions $f + g$, λf, fg ont une limite en x_0 et on a

$$\lim_{x \to x_0} (f + g) = \lim_{x \to x_0} f + \lim_{x \to x_0} g,$$
$$\lim_{x \to x_0} (\lambda f) = \lambda \left(\lim_{x \to x_0} f\right),$$
$$\lim_{x \to x_0} (fg) = \left(\lim_{x \to x_0} f\right)\left(\lim_{x \to x_0} g\right).$$

Si les fonctions f et g sont continues en x_0 on a (cf. § 4. 6 a)

$$\lim_{x \to x_0} (f + g) = f(x_0) + g(x_0), \ \lim_{x \to x_0} (\lambda f) = \lambda f(x_0), \ \lim_{x \to x_0} fg = f(x_0)\, g(x_0).$$

Nous pouvons donc énoncer :

Corollaire.

Étant données deux fonctions f et g continues en x_0 et un nombre réel λ les fonctions

$$f + g, \quad \lambda f, \quad fg$$

sont continues en x_0.

Pour les lecteurs que cela intéresse nous donnons la démonstration des résultats du théorème ci-dessus concernant $f + g$ et λf. La démonstration relative à fg vous sera proposée à l'exercice nº 4.18.

Soient deux fonctions f et g définies sur $]a, b[$ sauf peut-être en x_0 de $]a, b[$ et ayant respectivement pour limite l et l' au point x_0. La fonction

$$f + g : x \longmapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

est définie sur $]a, b[$ sauf peut-être en x_0, admet-elle pour limite $l + l'$ en x_0?
Pour tout $\alpha > 0$ cherchons à avoir

(1) $$|f(x) + g(x) - l - l'| < \alpha;$$

quel que soit x réel on a

$$|f(x) + g(x) - l - l'| = |f(x) - l + g(x) - l'| \leqslant |f(x) - l| + |g(x) - l'|;$$

pour avoir (1) il suffit que $|f(x) - l| < \frac{\alpha}{2}$ et que $|g(x) - l'| < \frac{\alpha}{2}$, ce qui est possible puisque, f ayant une limite l en x_0 on a :

$$(\exists \beta' \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 < |x - x_0| < \beta' \Longrightarrow |f(x) - l| < \frac{\alpha}{2};$$

g ayant une limite l' en x_0, de même

$$(\exists \beta'' \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 < |x - x_0| < \beta'' \Longrightarrow |g(x) - l'| < \frac{\alpha}{2},$$

donc en prenant $\beta = \inf(\beta', \beta'')$ nous aurons quel que soit x réel :

$$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) + g(x) - l - l'| < \alpha.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\lim_{x \to x_0} (f + g) = \lim_{x \to x_0} f + \lim_{x \to x_0} g.$$

Soit une fonction f définie sur $]a, b[$ sauf peut-être en x_0 de $]a, b[$ et ayant une limite l en x_0. Soit un nombre réel donné λ, la fonction

$$\lambda f : x \longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

est définie sur $]a, b[$ sauf peut-être en x_0 de $]a, b[$, admet-elle pour limite λl au point x_0?
Pour tout $\alpha > 0$ cherchons à avoir

(2) $$|\lambda f(x) - \lambda l| < \alpha.$$

Quel que soit x réel on a :

$$|\lambda f(x) - \lambda l| = |\lambda [f(x) - l]| = |\lambda|\,|f(x) - l|;$$

si $\lambda \neq 0$, pour avoir (2) il suffit que $|f(x) - l| < \frac{|\lambda|}{\alpha}$ ce qui est possible puisque f ayant une limite l en x_0 on a :

$$(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) - l| < \frac{\alpha}{|\lambda|},$$

si $\lambda = 0$, on a (2) pour tout x de $]a, b[$, sauf peut-être en x_0, puisque $\lambda f(x) - \lambda l = 0$.
Nous pouvons donc écrire

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda f) = \lambda \lim_{x \to x_0} f.$$

REMARQUES

1. Nous admettrons que les résultats précédents s'étendent aux limites à gauche et aux limites à droite
2. On démontre que les résultats relatifs à la somme et au produit s'étendent à la somme et au produit d'un nombre fini de fonctions.
   En particulier si n est un entier > 1 on aura
   $$\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^n$$

EXERCICE

Soit D un intervalle ouvert. Considérons l'ensemble des fonctions numériques continues sur D; cet ensemble, que nous noterons $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$, est une partie de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ (cf. § 2. 5). Démontrer les résultats suivants :

a) $(\mathcal{C}(D, \mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif. Que peut-on dire de ce groupe relativement à $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +)$

b) $(\mathcal{C}(D, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

c) $(\mathcal{C}(D, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire

4. 10 INVERSE D'UNE FONCTION AYANT UNE LIMITE NON NULLE EN x_0. APPLICATIONS

Soit g une fonction numérique définie sur une partie D de $\mathbb{R}$; pour qu'il existe une fonction $g_1 : D \longmapsto \mathbb{R}$, telle que

$$(\forall x \in D) \quad g(x)\, g_1(x) = 1$$

il faut et il suffit que

$$(\forall x \in D) \quad g(x) \neq 0 ;$$

nous représenterons cette fonction g par le symbole $\frac{1}{g}$.

Par extension si $g(x) \neq 0$ seulement sur $D' \subset D$ nous noterons encore $\frac{1}{g}$ la fonction définie sur D' telle que

$$(\forall x \in D') \quad \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}.$$

Soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide de centre x_0, sauf peut-être en x_0, et admettant une limite l, **non nulle**, en x_0

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \neq 0$$

Nous avons vu au § 4. 5 c qu'il existe $h > 0$ tel que pour tout x de

$$I' =]x_0 - h, x_0 + h[- \{x_0\}$$

on ait $\quad g(x)\, l > 0, \quad$ donc $\quad g(x) \neq 0. \quad$ On pourra donc définir $\frac{1}{g}$ sur I'.

Conformément au programme, nous admettrons le résultat suivant dont la démonstration vous sera proposée à l'exercice n° 4.18.

Théorème.

Étant donné une fonction g ayant une limite non nulle en x_0, la fonction $\frac{1}{g}$ a une limite en x_0 et on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} g}.$$

Soit f une autre fonction ayant une limite en x_0, on a par définition

$$\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g},$$

la troisième partie du théorème du § 4. 9 nous permet d'énoncer :

Corollaire 1.

Étant données deux fonctions f et g ayant chacune une limite en x_0, la limite de g étant **non nulle,** la fonction $\frac{f}{g}$ a une limite en x_0 et on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x \to x_0} f}{\lim_{x \to x_0} g}.$$

D'autre part si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$ f et g ont chacune une limite en x_0, $f(x_0)$ et $g(x_0) \neq 0$ d'où

Corollaire 2.

Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont des fonctions continues en x_0.

REMARQUE

Nous avons supposé que f et g avaient des limites en x_0 ou étaient continues en x_0. Si l'on suppose maintenant que f et g ont, toutes deux, des limites à droite en x_0 ou, toutes deux, des limites à gauche en x_0 ou sont, toutes deux, continues à droite en x_0 ou, toutes deux, continues à gauche en x_0, on trouvera des résultats analogues aux précédents, à condition que la limite à gauche, ou la limite à droite en x_0 de la fonction g soient des nombres **non nuls.**

4. 11 APPLICATIONS DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS

a) Continuité.

Toute *fonction constante* : $x \longmapsto \lambda$ (λ réel donné) et la *fonction identique* $x \longmapsto x$ définies sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}$ (on appliquera, pour le démontrer, la définition de la continuité en un point). Toute fonction déduite de ces deux fonctions par un nombre fini d'additions et de multiplications sera alors continue en tout point de $\mathbb{R}$. Ainsi

la fonction linéaire : $x \longmapsto ax$,
la fonction affine : $x \longmapsto ax + b$,
la fonction trinôme : $x \longmapsto ax^2 + bx + c$,

sont des fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}$

D'une façon générale quel que soit n entier strictement positif la fonction $x \longmapsto x^n$ est continue pour tout x, d'où :

Théorème.

Toute fonction polynôme

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

est une fonction continue quel que soit x de $\mathbb{R}$

Soient maintenant deux fonctions polynômes f et g, soit D l'ensemble des nombres réels où $g(x) \neq 0$: D est l'ensemble $\mathbb{R}$ dont on a retiré les racines du polynôme g qui, comme vous le savez, sont les solutions (ou racines) de l'équation $g(x) = 0$.

La fonction $\frac{f}{g}$ appelée **fonction rationnelle** est définie pour tout x de D; en un tel point f et g sont continues et $g(x) \neq 0$, d'où

Corollaire.

Toute fonction rationnelle est continue en tout point où elle est définie

EXEMPLES

1. Le nombre a' étant non nul la fonction, appelée **fonction homographique**,

$$x \longmapsto \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

est définie pour tout $x \neq -\frac{b'}{a'}$: elle est continue pour tout x de $\mathbb{R} - \left\{-\frac{b'}{a'}\right\}$.

2. La fonction

$$x \longmapsto \frac{x^3 + 4}{x^2 - x - 2}$$

est définie pour ($x \neq 2$ et $x \neq -1$); elle est continue pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

Comme nous l'avons annoncé à la fin du § 4. 3 les résultats du § 4. 10 nous permettent de démontrer la continuité de nombreuses fonctions sans effectuer la démonstration, quelquefois pénible, qui consiste, $\alpha > 0$ étant donné, à prouver qu'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout x on ait $|x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha$. Il en est de même pour le calcul des limites.

b) Recherche de limites.

Exemple 1. Soit la fonction $x \longmapsto \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x + 3}$, trouver la limite au point 2 de cette fonction, si cette limite existe.

Plutôt que d'appliquer la définition de la limite au point 2 comme nous l'avons fait dans les exercices de la section I de ce chapitre, ce qui n'est pas toujours simple et facile, remarquons que $f : x \longmapsto \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x + 3}$ est une fonction rationnelle de la variable réelle x, continue pour tout x n'annulant pas le dénominateur : c'est le cas de 2, on a $f(2) = \frac{5}{3}$. Comme f est continue pour $x = 2$, $\lim\limits_{x \to 2} f = \frac{5}{3}$

Exemple 2. Soit la fonction $x \longmapsto \frac{x^2 - 4x - 5}{x^3 + 1}$, trouver la limite au point -1, si cette limite existe.

Le numérateur et le dénominateur sont nuls pour $x = -1$; on a pour tout x de $\mathbb{R}$

$$x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5) \text{ et } x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Donc pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$ on a (car $x^2 - x + 1 > 0$ pour tout x réel)

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x^3 + 1} = \frac{x - 5}{x^2 - x + 1}$$

La fonction f donnée et la fonction $g : x \longmapsto \frac{x - 5}{x^2 - x + 1}$ coïncident sur $\mathbb{R} - \{-1\}$; f aura une limite pour $x = -1$ si et seulement si g en a une pour $x = -1$. Or pour $x = -1$, g est continue (-1 n'annule pas $x^2 - x + 1$) donc

$$\lim_{x \to -1} f = \lim_{x \to -1} g = g(-1) = \frac{-6}{3} = -2.$$

III. Extensions de la notion de limite et des opérations sur les limites.

4. 12 EXTENSIONS DE LA NOTION DE LIMITE

a) **La fonction f a pour limite l quand $|x|$ tend vers $+\infty$.**

Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{2x + 1}{x - 3}$ définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$. On conçoit que si $|x|$ prend des valeurs « grandes », on peut « négliger » 1 au numérateur et -3 au dénominateur et la valeur de f est « voisine » de $\frac{2x}{x} = 2$. Plus précisément pour tout $\alpha > 0$ cherchons à avoir

(1) $$\left|\frac{2x + 1}{x - 3} - 2\right| < \alpha$$

Or pour tout x de $\mathbb{R}$ on a

(1) $\Longleftrightarrow \left|\frac{2x + 1 - 2(x - 3)}{x - 3}\right| < \alpha \Longleftrightarrow \frac{7}{|x - 3|} < \alpha \Longleftrightarrow |x - 3| > \frac{7}{\alpha}$,

ou encore

(1) $\Longleftrightarrow \left(x - 3 > \frac{7}{\alpha} \quad \text{ou} \quad x - 3 < -\frac{7}{\alpha}\right)$

Pour avoir (1) il suffit que $x > 3 + \frac{7}{\alpha}$ ou que $x < 3 - \frac{7}{\alpha}$ cette dernière inégalité sera vérifiée si $x < -\left(3 + \frac{7}{\alpha}\right)$ l'est. Donc pour avoir (1) il suffit que $|x| > 3 + \frac{7}{\alpha}$. On est alors conduit aux trois définitions suivantes :

1. Soit une fonction f définie sur $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ $(a \leqslant b)$. *On dit que f a pour limite le nombre réel l (ou que f tend vers l) quand $|x|$ tend vers $+\infty$ si et seulement si, quel que soit le nombre réel strictement positif α donné à l'avance, il est possible de trouver un nombre réel strictement positif β tel que pour tout nombre réel x on ait*

$$|x| > \beta \Longrightarrow |f(x) - l| < \alpha$$

De façon plus condensée

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x \in]-\infty, -\beta[\cup]\beta, +\infty[) \quad |f(x) - l| < \alpha$$

on écrit $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f = l$ ou encore $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = l$.

Exemple : $$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$$

2. *Soit une fonction f définie sur $]a, +\infty[$. On dit que f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si on a*

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x \in]\beta, +\infty[) \quad |f(x) - l| < \alpha$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f = l$ ou encore $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Exemple : $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$$

3. *Soit une fonction f définie sur $]-\infty, a[$. On dit que f a pour limite l quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si on a*

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x \in]-\infty, -\beta[) \quad |f(x) - l| < \alpha$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f = l$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

Exemple : $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$$

REMARQUE

On démontrera l'unicité de la limite en s'inspirant de la démonstration de § 4.5. c.

EXERCICE

1. En appliquant la définition calculer $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{x+2}{x-1}$ et $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{5x^2+3}{x^2}$.

b) La fonction $|f|$ a pour limite $+\infty$ en un point x_0.

Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$. Si $|x - 2|$ est de plus en plus « petit »,

$\lvert x-2 \rvert$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	...
$\frac{1}{\lvert x-2 \rvert}$	10^3	10^4	10^5	...

On voit que $\frac{1}{|x-2|}$ est de plus en plus « grand ».

Plus précisément pour tout $\alpha > 0$ on a pour tout x réel :

$$0 < |x-2| < \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow \left|\frac{1}{x-2}\right| > \alpha$$

Plus généralement soit une fonction f définie sur $]a, b[$, sauf peut-être en x_0 de $]a, b[$. Rappelons que l'on appelle **valeur absolue de f**, que l'on note $|f|$, la fonction définie sur le même ensemble que f et qui associe à x le nombre $|f(x)|$. Nous poserons la définition suivante

On dit que $|f|$ a pour limite $+\infty$ au point x_0 (ou que $|f|$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0) si et seulement si, quel que soit le nombre réel $\alpha > 0$, il est possible de trouver un nombre réel $\beta > 0$ tel que pour tout nombre réel x on ait

$$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x)| > \alpha.$$

De façon plus condensée :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x \in]x_0 - \beta, x_0 + \beta[- \{x_0\}) \quad |f(x)| > \alpha.$$

On écrit $\lim\limits_{x \to x_0} |f| = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

On obtiendra quatre nouvelles définitions suivant les signes de $x - x_0$ et de $f(x)$. Ainsi dans l'exemple précédent :

$$0 < x - 2 < \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow \frac{1}{x-2} > \alpha$$

On écrit $\lim\limits_{x \to 2+0} f = +\infty$.

De même $$-\frac{1}{\alpha} < x - 2 < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x-2} < -\alpha$$

On écrit $\lim\limits_{x \to 2-0} f = -\infty$.

EXERCICES

En appliquant les définitions, étudier

2. $\lim\limits_{x \to -2+0} \frac{5x+1}{x+2}$, $\lim\limits_{x \to -2-0} \frac{5x+1}{x+2}$ (poser $x + 2 = h$).

3. $\lim\limits_{x \to [illegible]} \frac{5x^2 - 3}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x}{(x-1)^2}$ (poser $x = 1 + h$) [illegible]

5. Étudier la limite de $f : x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ quand x tend vers 0.

c) La fonction $|f|$ a pour limite $+\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3$ définit sur $\mathbb{R}$. Si $|x|$ est de plus en plus « grand ».

$\lvert x \rvert$	10^3	10^4	10^5	..
$\lvert x^3 \rvert$	10^9	10^{12}	10^{15}	..

on voit que $|x^3|$ est de plus en plus « grand ».

Plus précisément pour tout $\alpha > 0$ cherchons à avoir

$$|x^3| > \alpha.$$

si $|x| > 1$, en multipliant les deux membres de cette dernière inégalité par $|x|$ on a
$x^3 > |x|$; en multipliant les deux membres de cette dernière inégalité par $|x|$ on a
$|x^3| > x^2$ d'où $|x^3| > |x|$.

Soit alors $\beta = \sup(1, \alpha)$ on peut écrire pour tout nombre réel x :

$$|x| > \beta \longrightarrow |x^3| > \alpha;$$

on dit que $|f|$ a pour limite $+\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

Plus généralement : soit une fonction f définie sur $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ $(a \leqslant b)$. On dit que $|f|$ a pour limite $+\infty$ (ou que $|f|$ tend vers $+\infty$) quand $|x|$ tend vers $+\infty$, si et seulement si, quel que soit le nombre réel $\alpha > 0$, il est possible de trouver un nombre réel $\beta > 0$ tel que pour tout nombre réel x on ait :

$$|x| > \beta \longrightarrow |f(x)| > \alpha.$$

De façon plus condensée :

$$(\forall \alpha \in \quad ^{*})(\exists \beta \in \quad ^{*})(\forall x \in]-\infty, -\beta[\cup]\beta, +\infty[) \quad |f(x)| > \alpha$$

On écrit $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f| = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.

On obtiendra quatre nouvelles définitions suivant les signes de x et de $f(x)$. Ainsi dans l'exemple précédent :

$$x > \beta \Longrightarrow x^3 > \alpha,$$

on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty$.

De même $$x < -\beta \longrightarrow x^3 < -\alpha.$$

On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$.

EXERCICES

En appliquant les définitions précédentes
6. Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 \quad x \quad 1)$

7. Étudier la limite de $f : x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

4 13 EXTENSIONS DES OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

a) Énoncé des résultats.

On démontre les théorèmes suivants (les démonstrations ne sont pas au programme de cette classe)

Au point x_0 (ou à droite de x_0, ou à gauche de x_0) ou lorsque x tend vers $+\infty$ ou x tend vers $-\infty$:

I

	si f a pour limite	et si g a pour limite	alors $f + g$ a pour limite
1	l	$+\infty$	$+\infty$
2	l	$-\infty$	$-\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
5	$+\infty$	$-\infty$	on ne peut conclure

II

	si $\lvert f \rvert$ a pour limite :	et si $\lvert g \rvert$ a pour limite :	alors $\lvert fg \rvert$ a pour limite :
1	$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
2	0	$+\infty$	on ne peut conclure
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

III

	si $\lvert g \rvert$ a pour limite :	alors $\frac{1}{\lvert g \rvert}$ a pour limite :
1	0 (voir remarque 1)	$+\infty$
2	$+\infty$	0

Des tableaux II et III on peut déduire les lignes 1, 3, 4 du tableau IV en remarquant que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

IV

	si $|f|$ a pour limite :	et si $|g|$ a pour limite :	alors $\left|\frac{f}{g}\right|$ a pour limite :
1	$l \neq 0$	0 (voir remarque 1)	$+\infty$
2	0	0	on ne peut conclure
3	l	$+\infty$	0
4	∞	l (voir remarque 1)	$+\infty$
5	$+\infty$	$+\infty$	on ne peut conclure

REMARQUES

1. Dans le tableau III, ligne 1 et dans le tableau IV, ligne 1 et ligne 4 quand $l = 0$, la limite de g est 0, mais on suppose $g(x) \neq 0$ sur un intervalle $]a, b[$ contenant x_0 ou sur une demi-droite $]a, +\infty[$ quand x tend vers $+\infty$ ou sur une demi-droite $]-\infty, a[$ quand x tend vers $-\infty$, afin que $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ soient définies sur $]a, b[$ sauf peut-être en x_0 ou sur $]a, +\infty[$ ou sur $]-\infty, a[$.
2. Les théorèmes indiqués par les tableaux I, II, IV s'appliquent naturellement encore quand l'une des fonctions est une fonction constante non nulle, la limite de cette fonction étant la valeur de cette constante.
3. Dans les tableaux II et III et IV nous avons mis, pour simplifier, des valeurs absolues. Il restera à préciser, s'il y a lieu, le signe de la limite de fg, $\frac{1}{g}$ et de $\frac{f}{g}$ sur les exemples rencontrés.
4. Dans certains cas nous avons mis « *on ne peut conclure* ». On étudiera les limites correspondant à ces cas sur les exemples rencontrés. Le cas correspondant au tableau IV ligne 2 a été déjà rencontré plusieurs fois dans la 1re section de ce chapitre (§ 4. 2 exemples 2 et 4), § 4, 11 b, exemple 2) dans lesquels les numérateurs et les dénominateurs ont pour limite 0 au point x_0 considéré.

b) Exemples.

1. Étudions $\lim\limits_{x \to +\infty} (5x^3 + x^2 - 3)$.

Les théorèmes précédents sur la limite d'une somme, d'un produit, l'une des fonctions pouvant être constante, permettent d'écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = \lim_{x \to +\infty} (x.x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = \lim_{x \to +\infty} (x.x.x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} (5x^3) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} (5x^3 + x^2 - 3) = +\infty$$

2. Étudions $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^3 + x^2 - 3)$. Nous avons :

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} (5x^3) = -\infty,$$

et on ne peut conclure pour $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^3 + x^2)$ (cf tableau I ligne 5). Il nous faut chercher une autre méthode. On peut écrire pour tout $x \neq 0$

$$5x^3 + x^2 - 3 = x^3\left(5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}\right),$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{3}{x^3}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}\right) = 5,$$

comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ on a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}\right) = -\infty.$

3. On a vu que la méthode donnée dans l'exemple 1 ne s'applique pas à l'exemple 2. Inversement on vérifiera que la méthode donnée dans l'exemple 2 s'applique à l'exemple 1, elle est donc plus générale. Appliquons-la à la fonction polynôme

$$f : x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

définie sur $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$).

Mettons en facteur non pas x^n mais $a_n x^n$, pour tout $x \neq 0$ on a

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

Or

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n x}\right) = \dots = \lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}\right) = \lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 0$$

on en déduit

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1,$$

par suite quand $|x|$ tend vers $+\infty$, $f(x)$ a même limite que $a_n x^n$. On peut énoncer :

> Quand $|x|$ tend vers $+\infty$, toute fonction polynôme de la variable x a même limite que son terme de plus haut degré.

4. Étudions la limite de $f : x \longmapsto \frac{5x + 1}{x + 2}$ quand x tend vers -2. Nous avons proposé cet exercice comme application des définitions sur les limites (§ 4. 12 b exercice 2).

Appliquons, ici, les théorèmes sur les limites :

$\lim\limits_{x \to -2} (5x + 1) = -9,$

$\lim\limits_{x \to -2} (x + 2) = 0,$

$\lim\limits_{x \to -2} \left|\frac{5x + 1}{x + 2}\right| = +\infty$ (théorème du tableau IV, ligne 1) ;

l'étude du signe de $\frac{5x + 1}{x + 2}$ permet d'écrire

$$\lim_{x \to -2+0} \left(\frac{5x + 1}{x + 2}\right) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -2-0} \left(\frac{5x + 1}{x + 2}\right) = +\infty.$$

5. Étudions $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{5x+1}{x+2}\right)$. Nous avons :

$$\lim_{|x|\to+\infty}|5x+1| = +\infty,$$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}|x+2| = +\infty$. On ne peut conclure pour le quotient $\dfrac{5x+1}{x+2}$ (cf tableau IV, ligne 5).

On peut écrire pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{5x+1}{x+2} = \frac{x\left(5+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{5+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}.$$

Or

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right) = 5, \quad \lim_{|x|\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right) = 1,$$

d'où

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{x+2}\right) = \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{5+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right) = 5$$

Plus généralement soit une fonction rationnelle de la variable réelle x, c'est-à-dire le quotient de deux fonctions polynômes de la variable x :

$$f : x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

($a_n \neq 0$, $b_p \neq 0$) définie pour tout nombre réel x n'annulant pas le dénominateur.

Étudions $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f$ en procédant comme précédemment mais en mettant, plus précisément, $a_n x^n$ en facteur au numérateur et $b_p x^p$ au dénominateur. On peut écrire pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{a_n x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\dots+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}\right)}{b_p x_p\left(1+\frac{b_{p-1}}{b_p x}+\dots+\frac{b_1}{b_p x^{p-1}}+\frac{b_0}{b_p x^p}\right)}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{a_n x^n}{b_p x^p}\, g(x),$$

$g(x)$ tendant vers 1 quand $|x|$ tend vers $+\infty$. Par suite quand $|x|$ tend vers $+\infty$ $f(x)$ a même limite que $\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$. On peut énoncer :

> Quand $|x|$ tend vers $+\infty$, une fonction rationnelle de la variable x a même limite que le quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Ainsi : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{2x^5+x^3-1}{x^2+2x+3}\right) = \lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{2x^5}{x^2}\right) = \lim\limits_{|x|\to+\infty}(2x^3)$

cette limite est $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{2x^2+1}\right) = \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2x^2}\right) = \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{x^4-2x+1}\right) = \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{3x}{x^4}\right) = \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{3}{x^3}\right) = 0$$

EXERCICES

Étudier les limites, dans les cas indiqués, des fonctions qui associent au nombre x le nombre suivant quand il existe :

1. $\dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$, quand x tend vers 2, vers -5, vers $+\infty$, vers $-\infty$.
2. $\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2(x+5)}$, quand x tend vers 2, vers -5, vers $+\infty$, vers $-\infty$.
3. $\dfrac{8x^3-27}{4x^2-9}$, quand x tend vers $\frac{3}{2}$, vers $-\frac{3}{2}$, vers $+\infty$, vers $-\infty$.
4. $(x-2)\left(1+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}\right)$, quand x tend vers 2, vers $+\infty$, vers $-\infty$.
5. $\dfrac{x^3-1}{\sqrt{(x-1)^2}}$, quand x tend vers 1, vers $+\infty$, vers $-\infty$.
6. $\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{ax}{(x^2-1)^2}$, quand x tend vers 1 (discuter suivant la valeur de a).
7. $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{a}{x^3-1}$, quand x tend vers 1 (discuter suivant la valeur de a).



EXERCICES

Définition de la continuité et de la limite en un point : ex. 1-2-10-17-18.

Opérations sur les fonctions continues : ex. 3-4-5.

Opérations sur les limites (extensions) : ex. 6-7-8-9-11-12-13-14-15-16.

4. 1 Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

si x est rationnel $x \longmapsto x$
si x n'est pas rationnel $x \longmapsto 0$.

4. 2 Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

si x est rationnel $x \longmapsto x$
si x n'est pas rationnel $x \longmapsto 1 - x$.

4.3 On désigne par $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $D = [0, 2]$. On sait que cet ensemble, muni de l'addition et de la multiplication des fonctions numériques, a une structure d'anneau commutatif unitaire.

a) Étudier la continuité et faire la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$\text{si } x \in [0, 1] \quad f(x) = 0$$
$$\text{si } x \in]1, 2] \quad f(x) = x - 1$$

b) Étudier la continuité et faire la représentation graphique de la fonction g définie par :

$$\text{si } x \in [0, 1] \quad g(x) = 1 - x$$
$$\text{si } x \in]1, 2] \quad g(x) = 0$$

c) Quel est le produit fg ? Qu'en concluez-vous ?

4.4 $E(x)$ désignant la partie entière de x, soit la fonction $f : x \longmapsto (-1)^{E(x)}[x - E(x)]$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x + 2) = f(x).$$

Que peut-on dire des points $M(x, f(x))$ et $M'(x + 2, f(x + 2))$?

b) Étudier la continuité et faire la représentation graphique de f.

4.5 $E(x)$ désignant la partie entière de x, soit la fonction $f : x \longmapsto E(x) + [x - E(x)]^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x + 1) = f(x) + 1.$$

Que peut-on dire des points $M(x, f(x))$ et $M'(x + 1, f(x + 1))$?

b) Étudier la continuité et faire la représentation graphique de f.

4.6 Soit la fonction f de la variable réelle x : $x \longmapsto 2x^2 - x + 1 + \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{R})$

a) Étudier la limite de f quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

b) Étudier la limite de f quand x tend vers 0 (discuter suivant a).

4.7 Mêmes questions avec f : $x \longmapsto \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x}$ (discuter suivant a, b, c, d s'il y a lieu)

4.8 Soit la fonction f de la variable réelle x : $x \longmapsto \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1}$.

a) Étudier la limite de f quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

b) Étudier la limite de f au point 1 (discuter suivant a et b)

c) Peut-on trouver un prolongement de f par continuité au point 1 ?

4.9 Soit la fonction f de la variable réelle x : $x \longmapsto \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5}$.

a) Étudier la limite de f quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

b) Étudier la limite de f au point 1, au point 5

c) Peut-on trouver un prolongement de f par continuité au point 1 ? au point 5 ?

4.10 Démontrer que si la limite de $f(x)$ est 1 au point x_0 (ou quand $|x|$ tend vers $+\infty$), la limite de $\sqrt{f(x)}$ est aussi 1 au point x_0 (ou quand $|x|$ tend vers $+\infty$).

Etudier les limites suivantes (ex. 11 à 16).

4.11 $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

4.12 $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x^2 - x}$$

4.13 $$\lim_{|x| \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

(remarquer que, si $x \neq 0$,

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} = |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{x^3}{3}} \text{ et que } \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = 1$$

d'après l'exercice 10).

4.14 $$\lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x - 5}}{2x}\right).$$

4.15 $$\lim_{|x| \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x).$$

4.16 $$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x).$$

Sujets d'étude

4.17 *a*) En écrivant $a = (a - b) + b$, démontrer que :

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|$$

En écrivant de même $b = (b - a) + a$, démontrer que :

$$|b| - |a| \leqslant |a - b|$$

En déduire que, quels que soient les nombres réels a et b,

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|$$

b) Démontrer que si f est une fonction continue au point x_0, $|f|$ est continue au point x_0.

c) Démontrer que si f a une limite l au point x_0, $|f|$ admet pour limite $|l|$ au point x_0.

4.18 On se propose de démontrer les théorèmes admis dans le cours : si f et g sont deux fonctions ayant une limite en x_0, $\lim_{x \to x_0} (fg) = \lim_{x \to x_0} f \times \lim_{x \to x_0} g$ et si f a une limite non nulle en x_0, $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} f}$.

a) Démontrer que si f a une limite l en x_0, il existe un nombre positif M et un intervalle pointé $\dot{I}'$ de centre x_0 tel que :

$$(\forall x \in \dot{I}') \qquad |f(x)| < M.$$

b) Démontrer que si f a une limite $l \neq 0$, en x_0, il existe un nombre positif m et un intervalle pointé $\dot{J}'$ de centre x_0 tel que :

$$(\forall x \in \dot{J}') \qquad |f(x)| > m$$

(distinguer deux cas : $l > 0$, $l < 0$).

c) On suppose que f et g ont pour limites respectives l et l' au point x_0.
En écrivant $f(x)\,g(x) - ll' = [f(x) - l]\,g(x) + l\,[g(x) - l']$ montrer que, étant donné $\alpha > 0$, on peut trouver $\beta > 0$ tel que, quel que soit x réel on a :

$$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x)\,g(x) - ll'| < \alpha$$

d) On suppose que f a une limite *l non nulle* au point x_0. Démontrer de même que, étant donné $\alpha > 0$, on peut trouver $\beta > 0$ tel que, quel que soit x réel on a :

$$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| < \alpha$$

5

Dérivées

*Il s'agit toujours dans ce chapitre de fonctions numériques d'une variable réelle. Dans la première section nous définissons une **fonction différentiable** en x_0 ainsi qu'une **fonction dérivable** en x_0. Nous montrons l'équivalence de ces deux définitions et nous en donnons une interprétation géométrique*
*On est ainsi conduit dans la section II, pour les fonctions différentiables (ou dérivables) en tout point de]a, b[, à la notion de **fonction dérivée**.*
Enfin la section III donne diverses extensions de la notion de dérivée

I. Dérivée d'une fonction en un point. Interprétation géométrique

5. 1 FONCTION LINÉAIRE TANGENTE A UNE FONCTION EN UN POINT

a) Fonction différentiable en x_0.

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3 + x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Nous nous proposons de calculer une valeur approchée de $f(1{,}017)$ par exemple, sans calculer $(1{,}017)^3$ ni $(1{,}017)^2$. Pour cela posons $x = 1 + h$. Quel que soit le nombre réel h nous avons :

$$f(1 + h) = (1 + h)^3 + (1 + h)^2$$
$$= (1 + 3h + 3h^2 + h^3) + (1 + 2h + h^2)$$
$$= 2 + 5h + 4h^2 + h^3,$$

pour h « petit », on peut « négliger » $4h^2$ et h^3 d'où $f(1 + h) \simeq 2 + 5h$, donc

$$f(1{,}017) \simeq 2 + (5 \times 0{,}017),$$
$$f(1{,}017) \simeq 2{,}085.$$

On peut écrire : $f(1 + h) = 2 + 5h + (4h + h^2)h$, remarquons que $f(1) = 2$ donc :

$$f(1 + h) = f(1) + 5h + \alpha(h)h,$$

en posant $\alpha(h) = 4h + h^2$. Remarquons que $\lim\limits_{h \to 0} \alpha = 0$. On dit que f est différentiable au point $x_0 = 1$ et que la fonction : $h \longmapsto 5h$ est la fonction linéaire tangente à f au point $x_0 = 1$. Plus généralement :

Définition.

On dit qu'une fonction f est **différentiable** au point x_0 s'il existe une application linéaire $h \longmapsto lh$ et une fonction $h \longmapsto \alpha(h)$ définie sur un intervalle I de centre zéro telles que

$$(\forall h \in \mathrm{I}) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)h \qquad (1)$$

avec

$$\lim_{h \to 0} \alpha = 0$$

L'application : $h \longmapsto lh$ est alors appelée **fonction linéaire tangente** à la fonction f au point x_0 ou encore **différentielle de** f au point x_0. On la note df_{x_0}.

On a donc pour tout h réel

$$df_{x_0}(h) = lh$$

Remarquons qu'il résulte de la définition qu'une fonction différentiable en x_0 est définie sur un intervalle ouvert non vide de centre x_0.

b) Fonction dérivable en x_0.

Pour $h \neq 0$, la relation (1) s'écrit

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l + \alpha(h) \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \alpha = 0,$$

donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l$$

Réciproquement si $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a pour limite un nombre l quand h tend vers 0, on peut trouver une fonction α telle que :

$$\alpha(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - l$$

sur un intervalle I de centre zéro, zéro exclu, et telle que $\alpha(0) = k$ (k étant un nombre réel que l'on peut se donner arbitrairement ; on peut prendre par exemple, ce que nous ferons souvent, $k = 0$, alors α est continue au point zéro).
Nous pouvons alors écrire

$$(\forall h \in \mathrm{I}) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)h$$

α étant une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{h \to 0} \alpha = 0$.
Nous voyons donc que la recherche d'une fonction linéaire tangente à f en x_0 revient à la recherche, lorsque h tend vers zéro, de la limite de

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Définition.

On dit qu'une fonction f est **dérivable** en x_0 si et seulement s'il existe un nombre réel l tel que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l.$$

Ce nombre l, lorsqu'il existe, est appelé **dérivée** de f au point x_0.

Si on appelle $f(x_0 + h) - f(x_0)$ l'*accroissement de la fonction* f associée à l'*accroissement* $(x_0 + h) - x_0 = h$ *de la variable* et $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ le **taux d'accroissement** de la fonction f entre x_0 et $x_0 + h$, on voit que la dérivée en x_0, lorsqu'elle existe, est la limite, pour h tendant vers zéro, de ce taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$.

c) Premières propriétés des fonctions différentiables en x_0.

Nous venons de démontrer le résultat suivant :

Théorème.

Pour toute fonction définie sur un intervalle de centre x_0 les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1. La fonction est différentiable en x_0.
2. La fonction est dérivable en x_0.

EXEMPLE

Reprenons l'exemple du § 5. 1 a) $f : x \longmapsto x^3 + x^2$; cette fonction est-elle dérivable en $x_0 = 1$?

On a $f(1) = 2$ et $f(1 + h) = (1 + h)^3 + (1 + h)^2 = 2 + 5h + 4h^2 + h^3$ d'où $\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = 5 + 4h + h^2$ et $\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = 5$ donc f est dérivable en $x_0 = 1$, la dérivée de f en ce point est 5. On peut écrire

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = 5 + \alpha(h)$$

pour tout $h \neq 0$ et prendre $\alpha(0) = 0$. On a alors :

$$(\forall h \in \mathbb{R}) \quad f(1 + h) = f(1) + 5h + \alpha(h)\,h \quad \text{avec} \lim_{h \to 0} \alpha = 0,$$

on retrouve le résultat du § 5. 1 a.

On sait que si $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite l quand h tend vers 0, cette limite est unique (§ 4. 5 c). Donc la *fonction linéaire* : $h \longmapsto lh$ *tangente* à f en x_0, quand elle existe, est *unique*.

Si f est différentiable en x_0, on a vu que, sur un intervalle décrit par h, de centre zéro, on peut écrire :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)\,h \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \alpha = 0;$$

donc $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, ce qui signifie en posant $x = x_0 + h$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Par conséquent (cf § 4. 6 a)

Théorème.

Toute fonction différentiable (ou dérivable) au point x_0 est continue en ce point.

La réciproque n'est pas vraie. Soit, par exemple, la fonction $f : x \longmapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$. On a

$$\text{si} \quad x \geqslant 0 \quad f(x) = x,$$
$$\text{si} \quad x \leqslant 0 \quad f(x) = -x,$$

f est continue au point $x_0 = 0$ car $\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x) = f(0) = 0.$

Cherchons si f admet une dérivée au point $x_0 = 0$. Ici le changement de variable : $x = x_0 + h$ conduit à $x = h$, nous garderons donc dans les calculs la variable x. Le rapport

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

devient pour tout $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

$$\text{Si } x > 0 \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

$$\text{si } x < 0 \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

donc *f n'est pas dérivable au point* $x_0 = 0$ puisque les limites à gauche de 0 et à droite de 0 de $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ sont distinctes

EXERCICES

Calculer les dérivées et trouver les fonctions linéaires tangentes aux fonctions numériques de la variable réelle suivante :

1. $x \longmapsto x^2$ au point $x_0 = 1$.
2. $x \longmapsto \frac{1}{x}$ au point $x_0 = 2$.
3. $x \longmapsto x^2 + 3x - 2$ au point $x_0 = 3$.
4. $x \longmapsto \frac{x + 1}{x - 2}$ au point $x_0 = -1$.

5. 2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES EN UN POINT

Posons $m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ $(h \neq 0)$, f étant l'une des fonctions suivantes :

1. Fonction constante $x \longmapsto \lambda$, définie sur $\mathbb{R}$. On a

$$m(h) = \frac{\lambda - \lambda}{h} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} m(h) = 0$$

Donc toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est dérivable en un point quelconque de $\mathbb{R}$ et sa dérivée est 0 en tout point de $\mathbb{R}$.

2. Fonction affine : $x \longmapsto ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$. Au point x_0 nous avons

$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b, \quad f(x_0) = ax_0 + b,$$

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{a(x_0 + h) + b - ax_0 - b}{h} = \frac{ah}{h},$$

comme $h \neq 0$ $\quad m(h) = a \quad$ et $\quad \lim_{h \to 0} m(h) = a$. Donc

Toute fonction affine $x \longmapsto ax + b$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et en tout point de $\mathbb{R}$ sa dérivée est a.

3. Fonction polynôme : $x \longmapsto ax^2 + bx + c$, définie sur $\mathbb{R}$. Au point x_0 nous avons

$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c, \quad f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c,$$

$$m(h) = \frac{a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c - ax_0^2 - bx_0 - c}{h} = \frac{ah^2 + (2ax_0 + b)h}{h}$$

d'où ($h \neq 0$)

$m(h) = ah + 2ax_0 + b$ et $\lim\limits_{h \to 0} m(h) = 2ax_0 + b$. Donc

Toute fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ et sa dérivée en x_0 est $2ax_0 + b$.

En particulier si l'on fait $a = 1$ et $b = 0$, nous voyons que la dérivée de la fonction : $x \longmapsto x^2$ au point x_0 est $2x_0$.

4. Fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ **définie sur** $\mathbb{R}^*$. Au point $x_0 \neq 0$ nous avons

$$f(x_0 + h) = \frac{1}{x_0 + h}, \quad f(x_0) = \frac{1}{x_0},$$

$$m(h) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}\right) = \frac{1}{h}\,\frac{x_0 - x_0 - h}{(x_0 + h)\,x_0} = -\frac{1}{(x_0 + h)\,x_0},$$

$$\lim_{h \to 0} m(h) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

La fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée en x_0 est $\frac{-1}{x_0^2}$

5. 3 INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUES

a) Interprétation géométrique de la dérivée.

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soient Γ sa présentation graphique (fig. 1) et Δ la droite passant par $M_0\,(x_0, f(x_0))$ et $M\,(x, f(x))$ de Γ. Le coefficient directeur de Δ est $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ou encore, en posant $x = x_0 + h$, $m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Ce coefficient directeur n'est autre que le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$.

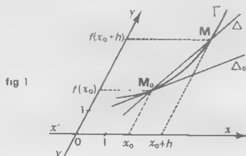


fig 1

Nous donnerons la définition suivante :

Définition.

Soient Γ la représentation graphique d'une fonction numérique f de la variable réelle x et Δ_0 une droite passant par $M_0\,(x_0, f(x_0))$ de Γ et non parallèle à Oy. On dit que Δ_0 est **tangente** à Γ en M_0 si le coefficient directeur de la droite passant par M_0 et $M\,(x_0 + h, f(x_0 + h))$ a pour limite le coefficient directeur de Δ_0 quand h tend vers 0.

On sait que $m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 si et seulement si f est dérivable au point x_0. On peut donc énoncer :

Théorème.

Pour que la représentation graphique Γ de f admette une tangente au point $M_0\,(x_0, f(x_0))$, non parallèle à Oy, il faut et il suffit que f soit dérivable au point x_0. Le coefficient directeur de cette tangente est alors la dérivée de f au point x_0.

Équation de la tangente. Si f a pour dérivée l au point x_0, la tangente Δ_0 au point M_0 de Γ a pour équation (cf. cours de Seconde)

$$y - f(x_0) = l(x - x_0)$$

que l'on peut écrire

$$y = f(x_0) + l(x - x_0)$$

REMARQUE

Nous avons vu que si f est dérivable en x_0, la dérivée en ce point étant l, il existe (cf. § 5. 1) un nombre l et une fonction α définie sur un intervalle I de centre zéro tels que :

$$(\forall h \in I) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)\,h \quad \text{avec} \lim_{h \to 0} \alpha = 0,$$

ou encore sur un intervalle J de centre x_0 on a :

$$(\forall x \in J) \quad f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0),$$

en posant $\beta(x) = \alpha(x - x_0)$, on a aussi $\lim\limits_{x \to x_0} \beta = 0$.

Nous voyons alors que la fonction affine : $x \longmapsto f(x_0) + l(x - x_0)$ n'est autre que la fonction représentée graphiquement par la tangente Δ_0 en M_0 à Γ. Cette fonction s'appelle la **fonction affine tangente à f au point x_0**.

EXEMPLE

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3 + x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. On a vu (cf. § 5 1 b) que la dérivée de f au point $x_0 = 1$ est $l = 5$. On a $f(x_0) = 2$. Donc la fonction affine tangente à f au point $x_0 = 1$ est la fonction $x \longmapsto 2 + 5(x - 1)$. L'équation de la tangente Δ_0 à la représentation graphique Γ de f au point $M_0\,(1, 2)$ est donc : $y = 2 + 5(x - 1)$ ou encore, après réduction $y = 5x - 3$.

Pour construire Δ_0 remarquons que son équation peut s'écrire :
$y - f(x_0) = l(x - x_0)$ ou encore $y - y_0 = l(x - x_0)$ en posant $y_0 = f(x_0)$, nous aurons un deuxième point $M_1\,(x_1, y_1)$ de Δ_0 en prenant $x_1 - x_0 = 1$ par exemple, d'où $y_1 - y_0 = l$. Le vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ a pour coordonnées $x_1 - x_0 = 1$ et $y_1 - y_0 = l$.
Dans l'exemple considéré, l'équation de Δ_0 s'écrit : $y - 2 = 5(x - 1)$.
Si $x_1 - 1 = 1$ on a $y_1 - 2 = 5$.

Nous avons construit (fig. 2) la droite Δ_0 portée par le vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ de coordonnées 1 et 5. La tangente Δ_0 est indiquée sur la figure pour deux petites flèches de part et d'autre de M_0.

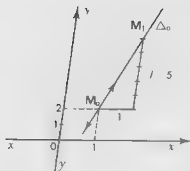


fig. 2

b) Interprétation géométrique de la différentielle.

La fonction f étant dérivable (ou différentiable) au point x_0, il existe une fonction α définie sur un intervalle I de centre zéro telle que

$$(\forall h \in I) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = lh + \alpha(h)\, h \quad \lim_{h \to 0} \alpha = 0$$

$$(\forall h \in I) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = h\,[l + \alpha(h)] \quad \lim_{h \to 0} \alpha = 0$$

donc si $l \neq 0$, lh est une valeur approchée de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ et on peut écrire $f(x_0 + h) - f(x_0) \simeq lh$ pour h « petit », c'est-à-dire (fig. 3)

$$\overline{PM} \simeq \overline{PM'}$$

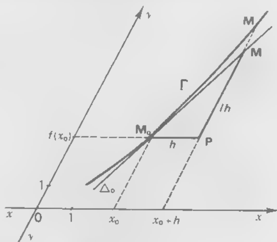


fig. 3

Rappelons que PM' = lh est la *valeur de la différentielle de f au point x_0 pour un accroissement h de la variable x*

EXEMPLE

Soit $f : x \longmapsto x^3 + x^2$ définie sur ℝ. On a vu (cf. § 5. 1 a) que quel que soit le nombre réel h

$$f(1 + h) - 2 = 5h + 4h^2 + h^3$$

ou encore : $f(1 + h) - 2 = 5h + (4h + h^2)\, h$, remarquons que $\lim_{h \to 0} (4h + h^2) = 0$

donc : $\qquad f(1 + h) - 2 \simeq 5h \quad$ pour h « petit »,

nous avons trouvé par exemple (cf. § 5. 1 a) que :

$$f(1{,}017) - 2 \simeq 0{,}085$$

On peut se demander comment sont disposés les points de Γ par rapport à la tangente Δ_0 lorsque h est « petit ». On peut écrire

$$f(1 + h) - 2 = 5h + 4h^2\left(1 + \frac{h}{4}\right),$$

pour $|h| < 4$, on a : $f(1 + h) - 2 \geqslant 5h$ donc $\overline{PM} \geqslant \overline{PM'}$ d'où la disposition de Γ (fig. 4).

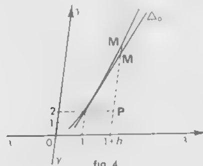


fig. 4

EXERCICES

1. Déterminer la tangente à l'origine aux représentations graphiques des fonctions :

$$x \longmapsto x^2$$
$$x \longmapsto x^3$$
$$x \longmapsto x^4$$

Étudier comment est disposée la représentation graphique de chacune de ces fonctions par rapport à cette tangente.

2. Trouver l'équation de la tangente aux représentations graphiques Γ des fonctions suivantes au point de Γ d'abscisse x_0 et construire cette tangente

$$x \longmapsto 2x^3, \qquad x_0 = 1,$$
$$x \longmapsto \frac{3}{x}, \qquad x_0 = 1,$$
$$x \longmapsto x^2 - 2x, \qquad x_0 = 0$$

II. Fonction dérivée : définition, calcul

5. 4 FONCTION DÉRIVÉE

a) Définition.

On dit que f définie sur $]a, b[$ est ***dérivable sur*** $]a, b[$ si et seulement si f est dérivable en tout point x de $]a, b[$.
Considérons l'application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

cette nouvelle fonction qui associe à tout nombre x de $]a, b[$ la dérivée de f au point x s'appelle la **fonction dérivée** de la fonction f. On la note f', d'où

$$(\forall x \in]a, b[) \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Avec cette définition la formule (1) du § 5. 1 devient pour $x_0 \in]a, b[$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \alpha(h)\,h,$$

avec

$$\lim_{h \to 0} \alpha = 0.$$

De même la fonction linéaire tangente à f en x_0 de $]a, b[$, c'est-à-dire la différentielle de f en x_0 est la fonction

$$h \longmapsto f'(x_0)\,h.$$

On notera la distinction entre la *fonction dérivée* f' et la *dérivée de* f *au point* x qui est le nombre $f'(x)$. Notons aussi que si $y = f(x)$, on écrit $y' = f'(x)$; y' est l'image de x par la fonction f'.

b) Exemples.

Nous avons calculé les dérivées de quelques fonctions usuelles en un point (cf § 5. 2).
1. La dérivée de la **fonction constante** $f : x \longmapsto \lambda$ en un point quelconque de $\mathbb{R}$ est 0. D'où :

La fonction dérivée de toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

2. La dérivée de la fonction **affine** $f : x \longmapsto ax + b$ en un point quelconque x de $\mathbb{R}$ est a. D'où :

La fonction dérivée de $f : x \longmapsto ax + b$ est la fonction constante $f' : x \longmapsto a$ sur $\mathbb{R}$

Remarquons que f' est indépendante de la valeur de b.
3. La dérivée de la fonction $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ **en un point quelconque** x **de** $\mathbb{R}$ **est** $2ax + b$. La fonction dérivée de f est donc la fonction $f' : x \longmapsto 2ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$. Remarquons que f' est indépendante de la valeur de c.

4. La dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ **en tout point** $x \neq 0$ **est** $-\frac{1}{x^2}$. La fonction dérivée de f est donc la fonction $f' : x \longmapsto \frac{-1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

5. 5 OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

Soient deux fonctions f et g dérivables, donc différentiables, en tout point x de $]a, b[$. Il existe un intervalle I de centre zéro tel que pour tout h de I on ait

(I) $\quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\,\alpha(h) \quad$ avec $\quad \lim_{h \to 0} \alpha = 0,$

(II) $\quad g(x+h) = g(x) + hg'(x) + h\,\beta(h) \quad$ avec $\quad \lim_{h \to 0} \beta = 0.$

En effet (I) est vérifiée sur un intervalle I' de centre zéro, de même (II) est vérifiée sur un intervalle I'' de centre zéro, il en résulte que (I) et (II) sont simultanément vérifiées sur $I = I' \cap I''$.
Notons dans ces formules que la variable est h qui décrit I, tandis que x est un point fixe de $\mathbb{R}$.

a) Addition.

On déduit des formules (I) et (II) que pour tout h de I on a

$$f(x+h) + g(x+h) = f(x) + g(x) + h\,[f'(x) + g'(x)] + h\,[\alpha(h) + \beta(h)]$$

ce qu'on peut écrire

$$(f+g)(x+h) = (f+g)(x) + h\,[(f'+g')(x)] + h\,\gamma(h),$$

en posant $\gamma(h) = \alpha(h) + \beta(h)$; or on a

$$\lim_{h \to 0} \gamma = \lim_{h \to 0} \alpha + \lim_{h \to 0} \beta = 0;$$

Ce qui montre que $f + g$ *est dérivable en tout point de* $]a, b[$ *et que la fonction dérivée de* $f + g$ *est définie sur* $]a, b[$ *par :*

(1) $$\boxed{(f+g)' = f' + g'}.$$

REMARQUE

1. Ce résultat s'applique à un nombre fini de fonctions $f_1, \ldots, f_n$ toutes dérivables sur $]a, b[$

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'.$$

b) Multiplication par un nombre réel.

Si λ est un nombre réel donné, nous avons aussi pour tout h de I' :

$$\lambda f(x+h) = \lambda f(x) + h\,[\lambda f'(x)] + h\,[\lambda\,\alpha(h)],$$

ce qu'on peut écrire :

$$(\lambda f)(x+h) = (\lambda f)(x) + h\,[(\lambda f')(x)] + h\,\delta(h),$$

en posant $\delta(h) = \lambda\,\alpha(h)$; or on a

$$\lim_{h \to 0} \delta = \lambda \lim_{h \to 0} \alpha = 0,$$

ce qui montre que λf est dérivable en tout point de $]a, b[$ et que la fonction dérivée de λf est définie sur $]a, b[$ par

(2) $$\boxed{(\lambda f)' = \lambda f'}.$$

REMARQUE

2. On pose $D =]a, b[$. Si l'on désigne par :
$\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle définie sur D,
$\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues en tout point de D,
$\mathcal{D}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables en tout point de D,
et si l'addition de ces fonctions est notée + et la multiplication d'une fonction par un nombre réel est notée . , on vérifiera, compte tenu des formules (1) et (2), que $(\mathcal{D}(D, \mathbb{R}), +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}(D, \mathbb{R}), +, .)$ qui est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, .)$ (cf § 2. 5 c et § 4. 9).

c) Multiplication.

Nous avons aussi pour tout h de I, en multipliant membre à membre les égalités (I) et (II)

$$f(x+h)\,g(x+h) = f(x)\,g(x) + h\,[f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)] + h\,\varepsilon(h),$$

en posant

$$\varepsilon(h) = \alpha(h)\,[g(x) + hg'(x)] + \beta(h)\,[f(x) + hf'(x)] + h\,[\alpha(h)\,\beta(h) + f'(x)\,g'(x)]:$$

les théorèmes sur les limites montrent que

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

On peut donc écrire pour tout h de I

$$(fg)(x+h) = (fg)(x) + h\,[(f'g)(x) + (fg')(x) + h\,\varepsilon(h)] \qquad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

ce qui montre que fg est dérivable en tout point de $]a, b[$ et que la fonction dérivée de fg est définie sur $]a, b[$ par

(3) $$\boxed{(fg)' = f'g + fg'}.$$

REMARQUES

3. La démonstration que l'on vient de donner s'applique si l'on a un nombre fini quelconque de fonctions dérivables. On trouvera par exemple, que si f, g, h sont trois fonctions dérivables en tout point de $]a, b[$, on a

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

En particulier, si n est un nombre entier naturel non nul :

$$(f^n)' = (ff \dots f)' = f'f \dots f + ff' \dots f + \dots + ff \dots f'$$

(4) $$\boxed{(f^n)' = nf^{n-1}f'}.$$

4. Si l'on note $\times$ la multiplication des fonctions numériques d'une variable réelle, les autres notations étant celles données à la remarque 2, on vérifiera, compte tenu des formules (1) et (3), que $(\mathcal{D}(D, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire. C'est un sous-anneau de $(\mathcal{C}(D, \mathbb{R}), +, \times)$ qui est lui-même un sous-anneau de $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, \times)$ (cf. § 2. 5 b et 4. 9).

d) Inverse et quotient.

Supposons toujours f dérivable en tout point de $]a, b[$ et supposons de plus que $f(x) \neq 0$ en tout point de $]a, b[$. Nous pouvons définir $\frac{1}{f}$ sur $]a, b[$ (cf § 4. 10). Pour savoir si $\frac{1}{f}$ est

dérivable, il est plus simple ici de former le taux d'accroissement de $\frac{1}{f}$ entre x et $x + h$ de $]a, b[$:

$$m(h) = \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = -\frac{f(x+h) - f(x)}{hf(x+h)\,f(x)},$$

$$m(h) = -\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{1}{f(x+h)\,f(x)}$$

puisque f est dérivable au point x de $]a, b,[$ on a $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$,

f étant dérivable au point x, f est aussi continue en ce point (cf § 5.1 c) donc $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ par suite

$$\lim_{h \to 0} m(h) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Donc si f ne s'annule pas et est dérivable en tout point de $]a, b[$, $\frac{1}{f}$ est dérivable en tout point de $]a, b[$ et sa fonction dérivée est définie sur $]a, b[$ par

(5) $$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}}$$

Soit alors la fonction $\frac{f}{g}$, f et g étant dérivables en tout point de $]a, b[$ et $g(x) \neq 0$ sur $]a, b[$

On peut écrire $$\frac{f}{g} = f\frac{1}{g},$$

d'où $$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' \quad \text{(d'après la formule (3))}$$

donc $$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) \quad \text{(d'après la formule (5))}$$

donc $$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

EXEMPLE

Soit la fonction : $x \longmapsto \frac{ax+b}{a'x+b'}$ définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{b'}{a'}\right\}$ si l'on suppose $a' \neq 0$; posons

$$f(x) = ax + b \quad \text{d'où} \quad f'(x) = a,$$
$$g(x) = a'x + b' \quad \text{d'où} \quad g'(x) = a',$$

pour tout $x \neq -\frac{b'}{a'}$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{a(a'x+b') - (ax+b)a'}{(a'x+b')^2} = \frac{ab' - ba'}{(a'x+b')^2}$

ce qu'on peut écrire : $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}{(a'x+b')^2}$$

EXERCICES

A l'aide des opérations sur les fonctions dérivables et en précisant, chaque fois, l'ensemble de définition de la fonction dérivée, trouver les fonctions dérivées des fonctions f telles que :

1. $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$,
2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ (retrouver le résultat du § 5. 2 exemple 3),
3. $f(x) = 2x^4 + \frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x + 1$,
4. $f(x) = 5(x-2)(x-3)(x-4)^2$,
5. $f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$,
6. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$.

e) Cas des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles.

D'après la formule 4 (remarque 3) pour tout x réel et pour tout entier $n \geqslant 1$ on a

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}.$$

Il résulte des opérations sur les fonctions dérivables que pour toute fonction polynôme f définie quel que soit x de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

on a

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)\,a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Enfin, la fonction rationnelle $\frac{f}{g}$ (f et g fonctions polynômes) est dérivable pour tout x tel que $g(x) \neq 0$.

5. 6 FONCTIONS DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Si f est dérivable en tout point de $]a, b[$, elle admet une fonction **dérivée** f' définie sur $]a, b[$. Si f' est elle-même dérivable en tout point de $]a, b[$, elle admet une fonction dérivée définie sur $]a, b[$ qui s'appelle la **fonction dérivée seconde** de f (ou la **fonction dérivée d'ordre 2 de** f) et qu'on note f''. On dit que f est dérivable deux fois en tout point de $]a, b[$.

Plus généralement on définira ainsi les fonctions dérivées successives de f sur $]a, b[$ si elles existent, $f^{(3)}$ ou f''' ..., $f^{(n)}$ appelées **fonction dérivée troisième** (ou d'ordre 3), ..., **fonction dérivée** $n^{\text{ième}}$ (ou d'ordre n) de f. On dit alors que f est **dérivable n fois en tout point de** $]a, b[$.

Par analogie la fonction dérivée f' de f sera aussi appelée **fonction dérivée première** (ou d'ordre 1) de f.

Posons $y = f(x)$. Les nombres $y'' = f''(x)$, $y''' = f'''(x)$, ..., $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ sont les images de x ($x \in]a, b[$) par les fonctions f'', f''', ..., $f^{(n)}$. On les appelle *dérivée seconde* (ou d'ordre 2), *dérivée troisième* (ou d'ordre 3), ..., *dérivée* $n^{\text{ième}}$ (ou d'ordre n) de la fonction f au point x de $]a, b[$.

EXERCICES

1. Calculer les dérivées successives des fonctions f suivantes, en un point quelconque de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^5,$$
$$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$
$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

Quelle est la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction polynôme de la variable x de degré n ? Que peut-on dire des dérivées suivantes ?

2. Soient f et g deux fonctions dérivables quatre fois en tout point de $]a, b[$. Calculer $(fg)'$, $(fg)''$, $(fg)'''$, $(fg)^{(4)}$ définies sur $]a, b[$.

III. Extensions de la notion de dérivée

Rappelons que le taux d'accroissement $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ peut aussi s'écrire $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ puisque l'on a posé $x - x_0 = h$.

5. 7 DÉRIVÉE A DROITE, DÉRIVÉE A GAUCHE

a) Définitions.

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 + |x|$ défini sur $\mathbb{R}$

si $x \geqslant 0 \quad f(x) = x^2 + x$,

si $x \leqslant 0 \quad f(x) = x^2 - x$;

étudions la limite de $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers 0.

Si $x > 0 \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 + x}{x} = x + 1 \quad$ et $\quad \lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to +0} (x + 1) = 1$

si $x < 0 \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - x}{x} = x - 1 \quad$ et $\quad \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to -0} (x - 1) = -1.$

La fonction f n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$ puisque

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

On dit que 1 est la *dérivée de la fonction f à droite au point* $x_0 = 0$ et que -1 est la *dérivée de la fonction f à gauche au point* $x_0 = 0$. Plus généralement :

Définitions.

Soit une fonction f définie sur $[x_0, a[$, ($x_0 < a$). On dit que la fonction f a une **dérivée à droite** au point x_0 si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite à droite au point x_0. On dit alors que f est dérivable à droite au point x_0.

Soit une fonction f définie sur $]a, x_0]$, ($a < x_0$). On dit que la fonction f a une dérivée à gauche au point x_0 si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite à gauche au point x_0. On dit alors que f est dérivable à gauche au point x_0.

REMARQUE

Pour que f soit dérivable au point x_0 il faut et il suffit que f admette une *dérivée à droite* et une *dérivée à gauche* au point x_0 qui soient *égales*.

Interprétation géométrique. Bornons-nous à étudier l'exemple précédent. Soit le point M $(x, f(x))$ de la représentation graphique Γ de f (fig. 5).

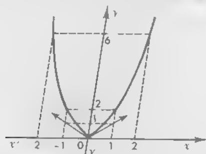


fig 5

Si $x > 0$ le coefficient directeur de la demi-droite [O, M) est $\frac{f(x)}{x} = x + 1$. Sa limite est 1 quand x tend vers 0 à droite. On dit que la représentation graphique Γ de f a une **demi-tangente à droite** à l'origine de coefficient directeur 1.

Si $x < 0$ le coefficient directeur de la demi-droite [O, M) est $\frac{f(x)}{x} = x - 1$. Sa limite est -1 quand x tend vers 0 à gauche. Γ a une **demi-tangente à gauche** à l'origine de coefficient directeur -1.

Les deux demi-tangentes en O n'ayant pas même support, on dit que O est un **point anguleux.**

EXERCICES

1. Soit la fonction $f : x \longmapsto |x - 1| + |x|$ définie sur $\mathbb{R}$. Étudier les dérivées de f à droite et à gauche au point $x_0 = 0$, au point $x_1 = 1$.
2. Soit la fonction $f : x \longmapsto |x^2 - 1|$ définie sur $\mathbb{R}$. Étudier les dérivées de f à droite et à gauche au point $x_0 = 1$. Construire les demi-tangentes correspondantes.
3. Soit la fonction $f : x \longmapsto |x(x + 1)|$ définie sur $\mathbb{R}$. Étudier les dérivées de f à droite et à gauche au point $x_0 = 0$, au point $x_1 = -1$. Construire les demi-tangentes correspondantes.

b) Fonction dérivable sur un intervalle.

Nous avons vu au § 5. 4 que l'on appelle *fonction dérivable sur* $]a, b[$ toute fonction dérivable en tout point de $]a, b[$.

On dit que f *est dérivable sur* $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et si elle est dérivable à droite au point a et à gauche au point b. (On suppose $a < b$).

On dit que f est dérivable sur $]a, +\infty[$ si elle est dérivable en tout point x tel que $x > a$.

On dit que f est dérivable sur $[a, +\infty[$ si elle est dérivable sur $]a, +\infty[$ et si elle est dérivable à droite au point a.

On définira de même une fonction dérivable sur $[a, b[$ ou sur $]a, b]$ ou sur $]-\infty, a[$ ou sur $]-\infty, a]$.

On dit que f est dérivable sur $]-\infty, +\infty[$ si elle est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

5. 8 DEMI-TANGENTE PARALLÈLE A y'y

Nous nous bornerons à donner un exemple. Soit la fonction

$$f : x \longmapsto \sqrt{x}$$

définie sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x > 0$ on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Il est évident que $\lim\limits_{x \to +0} \sqrt{x} = 0$, en effet quel que soit $\alpha > 0$ si on prend $\beta = \alpha^2$ on a pour tout x de $\mathbb{R}$

$$0 < x < \alpha^2 \Longrightarrow 0 < \sqrt{x} < \alpha$$

Donc (cf. § 4.13) $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, c'est-à dire

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

Interprétons géométriquement ce résultat. Considérons le point M $(x, f(x))$ de la courbe représentative Γ de la fonction f (fig. 6). Le coefficient directeur de la demi-droite [O, M) est $\frac{f(x)}{x}$, sa limite est $+\infty$ quand x tend vers 0 à droite.

Étudions le point M_1 (x_1, y_1) intersection de cette demi-droite avec la droite D d'équation $y = 1$. On a

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{f(x)}{x}$$

d'où, comme $y_1 = 1$, $x_1 = \frac{x}{f(x)} = \sqrt{x}$. Le point M_1 a donc pour coordonnées $x_1 = \sqrt{x}$ et $y_1 = 1$. Nous avons vu plus haut que $\sqrt{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 à droite : nous interpréterons ce résultat en disant que lorsque x tend vers zéro à droite le point M_1 $(\sqrt{x}, 1)$ tend vers le point M_1' (0, 1) et que la demi-droite [O, M_1') est la **demi-tangente à droite** au point O à Γ.

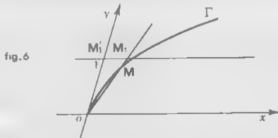


fig.6

EXERCICES

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\text{si } x \geqslant 0 \quad f(x) = \sqrt{x},$$
$$\text{si } x \leqslant 0 \quad f(x) = -\sqrt{-x}.$$

Examiner si la représentation graphique Γ de f admet une tangente à l'origine.

2. Même question pour la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{|x|}$.

EXERCICES

Définition de la dérivée : ex. 1-2-3-4.
Opérations sur les fonctions dérivables : ex. 5 à 11-16.
Différentielle : ex. 4-12.
Dérivées successives : ex. 13-14-15.
Tangente : ex. 17 à 22.

5.1 En utilisant la définition de la dérivée, calculer la dérivée de la fonction : $x \longmapsto \sqrt{x}$ au point $x_0 = 1$.

5.2 Même question avec la fonction : $x \longmapsto \sqrt{x+1}$ au point $x_0 = 0$.

5.3 Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{(x-3)^2}$ est continue au point $x_0 = 3$ mais n'est pas dérivable en ce point.

5.4 En utilisant la définition de la dérivée, calculer la dérivée de la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ au point $x_0 = 1$.
Trouver la différentielle de f au point $x_0 = 1$.
Montrer que $f(1+h) = 1 - h + \frac{h^2}{1+h}$.
Calculer $f(1{,}00079)$ par défaut avec une erreur inférieure à 10^{-6}.

A l'aide des opérations sur les fonctions dérivables et en précisant, chaque fois, l'ensemble de définition de la fonction dérivée, trouver les fonctions dérivées des fonctions f telles que (ex. 5 à 11).

5.5 $f(x) = (x^2 - 5x + 3)^4$.

5.6 $f(x) = (2x-1)^2 (x+2)^3$.

5.7 $f(x) = (x^2+1)^2 (x^3+1)^3$.

5.8 $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$.

5.9 $f(x) = \frac{5x^2 - 9}{(2x+3)^2}$.

5.10 $f(x) = 2x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.

5.11 $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 \left(\frac{x-3}{x+4}\right)$.

5.12 *a*) Trouver la différentielle de $f : x \longmapsto x^3$ au point x_0 de $\mathbb{R}$.
b) Soit un cube de métal dont les arêtes ont pour longueur x_0 à la température de 0 degré et pour longueur x à la température de t degrés. On appelle coefficient de dilatation linéaire le nombre α tel que :

$$x = x_0 (1 + \alpha t).$$

Si v_0 est le volume du cube à 0 degré et v son volume à t degrés, on appelle coefficient de dilatation cubique le nombre β tel que :

$$v = v_0 (1 + \beta t)$$

Si $h = x - x_0 = x_0 \alpha t$, quelle est la valeur de la différentielle de f au point x_0 pour l'accroissement h de la variable x ?
En déduire que le *coefficient de dilatation cubique est sensiblement le triple du coefficient de dilatation linéaire.*

5.13 Calculer les dérivées successives de la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x-a}$ pour $x \neq a$.

5.14 Soit la fonction numérique de la variable réelle : $x \longmapsto y = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$
Calculer y', y'', y''', $y^{(4)}$ quand elles existent (il sera commode de mettre y sous la forme $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$)

5.15 Soit f une fonction polynôme du 3[e] degré. Démontrer que :

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}) \quad (\forall h \in \mathbb{R}) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0).$$

Si $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$, calculer $f(3{,}002)$ par défaut avec une erreur inférieure à 10^{-4}, à 10^{-7}.

5.16 *a*) Montrer que l'application f :

$$x \longmapsto \frac{2x-1}{x-1} \text{ de } \mathbb{R} - \{1\} \text{ dans } \mathbb{R} - \{2\} \text{ est bijective.}$$

b) Calculer la dérivée de f en un point x de $\mathbb{R} - \{1\}$.
c) Soit $f^{-1} : x \longmapsto f^{-1}(x)$ la bijection réciproque de f qui applique $\mathbb{R} - \{2\}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
Calculer la dérivée de f^{-1} en un point x de $\mathbb{R} - \{2\}$.
d) On suppose $x_0 \neq 1$. Que peut-on dire de la dérivée de f au point x_0 et de la dérivée de f^{-1} au point $\frac{2x_0 + 1}{x_0 - 1}$?

5.17 Soit E l'ensemble des nombres $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \ldots, \pm \frac{1}{n}, \ldots$, n étant un entier naturel arbitraire non nul.
Soit la fonction f définie sur $[-1, 1]$ de la façon suivante :

$$\text{si } x \in \text{E} \quad f(x) = 0$$
$$\text{si } x \notin \text{E} \quad f(x) = x^2$$

Quelle est la représentation graphique Γ de f?
Montrer que f est dérivable au point $x_0 = 0$. Quelle est la tangente à Γ à l'origine?

5.18 Soit f la fonction numérique de la variable réelle : $x \longmapsto y = x^2 + 3x + 1$.
a) Former l'équation de la tangente à la représentation graphique Γ de f au point M_0 de Γ d'abscisse x_0.
b) Former l'équation de la tangente à Γ au point de Γ d'abscisse 2.
c) Former l'équation de la tangente Γ parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.
d) Former les équations des tangentes à Γ issues de l'origine.

5.19 Soit f la fonction numérique de la variable réelle : $x \longmapsto y = \frac{2}{x}$
a) Former l'équation de la tangente à la représentation graphique Γ de f au point M_0 de Γ d'abscisse x_0
b) Former l'équation de la tangente à Γ au point de Γ d'abscisse 1.
c) Former les équations des tangentes à Γ parallèles à la droite d'équation $y = -x$.
d) Discuter, suivant la position du point M de coordonnées α et β dans le plan, le nombre de tangentes à Γ issues de M.

5.20 Soit f la fonction numérique de la variable réelle : $x \longmapsto y = 2x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.
a) Calculer y' et y'' quand elles existent.
b) Construire les tangentes à la représentation graphique Γ de f aux points d'intersection de Γ avec l'axe Ox et au point de Γ pour lequel $y'' = 0$.

5.21 Soit f la fonction numérique de la variable réelle $x \longmapsto ax^2$ (a donné *non nul*).

a) Former l'équation de la tangente Δ à la représentation graphique Γ de f au point M de Γ d'abscisse x.

b) Si M est distinct de l'origine, Δ coupe les axes de coordonnées Ox et Oy respectivement en T et T'. Soient m la projection de M sur Ox parallèlement à Oy et m' la projection de M sur Oy parallèlement à Ox. Montrer que T est le milieu du segment [O, m] et que O est le milieu du segment [m', T']. En déduire une construction géométrique de Δ connaissant M.

c) On suppose le repère orthonormé.

1) Trouver l'ensemble des points P de coordonnées α et β d'où l'on peut mener deux tangentes à Γ perpendiculaires.

2) On appelle normale à Γ au point M de Γ la perpendiculaire à la tangente à Γ en M. Former l'équation de cette normale.

3) Si M est distinct de l'origine, la normale à Γ en M coupe Oy en N. Calculer $\overline{m'N}$.

5.22 Soit f la fonction numérique de la variable réelle : $x \longmapsto \frac{a}{x}$ (a donné non nul).

a) Former l'équation de la tangente Δ à la représentation graphique Γ de f au point M de Γ d'abscisse x.

b) Δ coupe les axes de coordonnées en T et T'. Montrer que M est le milieu du segment [T, T']. En déduire une construction géométrique de Δ connaissant M.

c) Si O est l'origine des coordonnées, montrer que le produit $\overline{OT} \times \overline{OT'}$ est constant quand M décrit Γ.





Etude des variations d'une fonction numérique d'une variable réelle. Application au mouvement rectiligne d'un point.

La section I de ce chapitre présente l'étude des **variations** *d'une fonction numérique d'une variable réelle à l'aide de la dérivée. Les notions de* parité, d'imparité *et de* périodicité, *exposées dans cette section, permettent de réduire dans certains cas l'ensemble où l'on étudie la fonction considérée. Le* plan d'étude *ainsi dégagé est appliqué à quelques exemples; il sera ensuite scrupuleusement appliqué aux exemples de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles qui sont l'objet des chapitres suivants.*
Dans la section II, après les définitions indispensables relatives au **mouvement d'un point,** *on montre comment la notion de dérivée conduit, pour les mouvements rectilignes, aux notions de* vitesse *et d'*accélération *qui permettent une étude plus précise de ce mouvement. La révision du* mouvement rectiligne uniforme *termine le chapitre.*

I. Variations d'une fonction numérique d'une variable réelle

1 SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

a) Fonction constante.

Rappelons qu'une fonction f est constante dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que, pour tout x de I, $f(x) = k$.
On a démontré (cf. § 5. 2) que la fonction dérivée de cette fonction est nulle pour toute valeur x de I

$$(\forall x \in I) \qquad f'(x) = 0$$

b) Fonction croissante.

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

Définition.

On dit que f est **croissante** sur I si et seulement si, quels que soient les points x_1 et x_2 distincts de I, on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant 0$$

On dit que f est **strictement croissante** sur I si et seulement si, quels que soient x_1 et x_2 éléments distincts de I, on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

Supposons que la fonction f soit dérivable et croissante sur I, et soit $f'(x_0)$ la valeur numérique de la dérivée pour les valeurs x_0 ($x_0 \in$ I) de la variable. D'après la définition de la dérivée :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

x est une valeur de l'intervalle I, *distincte de* x_0. Considérons la fonction m définie dans $I' = I - \{x_0\}$ par :

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pour tout x de I' on a $m(x) \geqslant 0$. Or

$$\lim_{x \to x_0} m(x) = f'(x_0);$$

il en résulte que $f'(x_0) \geqslant 0$. En effet, si $f'(x_0) < 0$, on a démontré au § 4. 5 c qu'il existe $h > 0$ tel que pour tout x de $]x_0 - h, x_0 + h[- \{x_0\}$ on a $m(x) < 0$, ce qui est impossible. Concluons.

Théorème.

La fonction f étant dérivable et croissante sur un intervalle I, pour tout point x_0 de I on a $f'(x_0) \geqslant 0$.

EXEMPLE

1. Soit l'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
   Soient deux valeurs réelles, positives, distinctes x_1 et x_2, on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2 > 0$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

   La fonction f considérée est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Sa fonction dérivée f' est définie par : $x \longmapsto f'(x) = 2x$; on a bien $2x \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}_+$.
   Remarquons que dans le cas étudié f est *strictement croissante* sur $\mathbb{R}_+$, et nous avons trouvé :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \qquad f'(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 0.$$

EXERCICE

Démontrer que $f : x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, que $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ et que $f'(0) = 0$.

Cet exemple et cet exercice montrent que si f est dérivable et strictement croissante sur I, on peut seulement affirmer $f'(x_0) \geqslant 0$ pour tout point x_0 de I. Nous verrons plus loin que les valeurs x_0 telles que $f'(x_0) = 0$ sont *isolées*, c'est-à-dire que l'on ne peut avoir $f'(x) = 0$ pour tous les points d'un intervalle (cf. § 6-2).

c) Fonctions décroissantes.

Soit une fonction f définie pour toute valeur x d'un intervalle I.

Définition.

On dit que f est **décroissante** sur un intervalle I si et seulement si, quels que soient les points distincts x_1 et x_2 de I, on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant 0.$$

On dit que f est **strictement décroissante** sur un intervalle I si et seulement si, quels que soient les points distincts x_1 et x_2 de I, on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans le cas d'une fonction croissante permet de démontrer le théorème suivant :

Théorème.

La fonction f étant dérivable et décroissante sur un intervalle I, pour tout point x_0 de I on a $f'(x_0) \leqslant 0$.

Si f est strictement décroissante sur I on peut seulement affirmer $f'(x_0) \leqslant 0$ pour tout x_0 de I ; cependant $f'(x_0) = 0$ seulement pour des valeurs isolées (on le verra au § 6-2).

EXEMPLES

2. Soit l'application f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Soient deux valeurs réelles, strictement positives, distinctes x_1 et x_2. On a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{x_1 x_2}, \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

   La fonction étudiée est donc une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Sa fonction dérivée f' est définie par $x \longmapsto f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ici on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \qquad f'(x) < 0.$$

3. Considérons l'application g de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$.
   Prenons deux valeurs réelles, négatives, distinctes x_1 et x_2. On a

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2, \qquad \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

   L'application étudiée est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Sa fonction dérivée g' est définie par $x \longmapsto g'(x) = 2x$. Ici on a

$$\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}_-^*) & g'(x) < 0 \\ & g'(0) = 0. \end{cases}$$

EXERCICES

Vérifier les théorèmes précédents pour les fonctions suivantes, dans des intervalles convenablement choisis pour chacune d'elles.

2 $f : x \longmapsto -\frac{3}{x}$, définie dans $\mathbb{R}^*$.
3 $g : x \longmapsto -2x^2$, définie dans $\mathbb{R}$.
4 $h : x \longmapsto 2x + 3$, définie dans $\mathbb{R}$.
5 $\varphi : x \longmapsto 2x^2 - 1$, définie dans $\mathbb{R}$.
6 $\psi : x \longmapsto -3x + 4$, définie dans $\mathbb{R}$.

6. 2 APPLICATION DU CALCUL DES DÉRIVÉES A L'ÉTUDE DU SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

Nous allons énoncer les théorèmes réciproques de ceux du § 1. Ils seront démontrés dans une classe ultérieure. Ils permettent de trouver le sens de variation d'une fonction beaucoup plus rapidement qu'en utilisant uniquement les définitions.

Théorème 1.

Si une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est telle que :

$$(\forall x \in I) \quad f'(x) = 0$$

cette fonction est une application constante sur I.

Ce théorème et celui rappelé au § 6. 1 a) ci-dessus permettent d'écrire, pour toute fonction dérivable dans I :

$$(f \text{ constante dans I}) \iff (\forall x \in I) \quad f'(x) = 0.$$

Soient deux fonctions f et g toutes deux dérivables sur un intervalle I, supposons que l'on ait

$$(\forall x \in I) \quad f'(x) = g'(x),$$

alors la fonction $f - g$ est telle que sur I on ait $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\forall x \in I) \quad f(x) - g(x) = k$$

Corollaire.

Étant donné deux fonctions f et g dérivables sur un intervalle I, si pour tout x de I $f'(x) = g'(x)$ il existe alors un nombre réel k tel que pour tout x de I on ait $f(x) - g(x) = k$

Théorème 2.

Si une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est telle que :

$$(\forall x \in I) \quad f'(x) \geqslant 0$$

cette fonction est une application croissante sur I

Ce théorème et celui démontré au § 6. 1 b) ci-dessus permettent d'écrire, pour toute fonction dérivable dans I :

$$(f \text{ croissante dans I}) \iff (\forall x \in I) \quad f'(x) \geqslant 0$$

Théorème 3.

Si une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est telle que :

$$(\forall x \in I) \quad f'(x) \leqslant 0$$

cette fonction est une application décroissante sur I.

Résumons ce théorème et celui du § 6. 1 c) sous forme d'une équivalence vraie pour toute fonction dérivable dans I :

$$(f \text{ décroissante dans I}) \iff (\forall x \in I) \quad f'(x) \leqslant 0$$

Le théorème 1 nous permet de dire que si une fonction dérivable est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur un intervalle I il est impossible que $f'(x) = 0$ pour tous les points de $]a, b[\subset I$ $(a \neq b)$ car f serait alors constante sur $]a, b[$. On aura donc $f'(x) > 0$ (resp $f'(x) < 0$) sauf en des points isolés.

De même en utilisant les théorèmes 1, 2 et 3 on peut énoncer

Corollaire.

Si une fonction f dérivable sur I est telle que $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout point x de I, sauf en des points isolés où $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

6. 3 EXTREMUMS RELATIFS D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

a) Définitions. Exemples.

Définitions.

Soit f une fonction numérique définie dans une partie D de $\mathbb{R}$.

On dit que f admet un **maximum relatif** $f(x_0)$ en x_0 s'il existe un intervalle I ouvert, non vide, de centre x_0, contenu dans D tel que

$$(\forall x \in I) \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

On dit que f admet un **minimum relatif** $f(x_0)$ en x_0 s'il existe un intervalle I, ouvert non vide, de centre x_0, contenu dans D tel que

$$(\forall x \in I) \quad f(x) \geqslant f(x_0)$$

Nous dirons que $f(x_0)$ est un **extremum relatif** si c'est un maximum relatif ou un minimum relatif.

Si pour tout x de D on a $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$), on dit $f(x_0)$ est un *maximum absolu* (resp. *minimum absolu*); un maximum absolu ou un minimum absolu, c'est-à-dire un *extremum absolu*, est donc un cas particulier d'extremum relatif.

EXEMPLES

1. Soit la fonction f définie pour toute valeur strictement positive de x par :

$$x \in]0, 1] \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$x \in]1, +\infty[\quad f(x) = x^2$$

Nous avons démontré précédemment (exemples du § 6.1) que la fonction définie dans $\mathbb{R}_+^*$ par $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est une fonction strictement décroissante dans $\mathbb{R}_+^*$, donc aussi dans $]0, 1]$. De même, la fonction définie dans $\mathbb{R}_+$ par $x \longmapsto x^2$ est une fonction strictement croissante dans $\mathbb{R}_+$, donc aussi dans $]1, +\infty[$.

Le tableau de variation de la fonction f se présente donc de la façon suivante .

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

et l'on peut conclure que dans l'intervalle $I =]0, +\infty[$, la fonction f présente un minimum relatif égal à $+1$ pour $x_0 = 1$. (C'est d'ailleurs le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}_+^*$. La représentation graphique est donnée à la figure 1.

On constatera que f n'est pas dérivable pour $x = 1$ en montrant que f a pour $x = 1$ une dérivée à gauche -1 et une dérivée à droite $+2$.

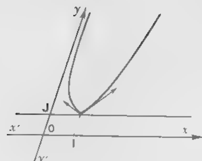


fig 1

2. Considérons la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = x^2$. Les résultats trouvés précédemment (cf. § 6.1, exemples 1 et 3) permettent de faire le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

La fonction f admet un minimum relatif égal à 0 pour la valeur $x_0 = 0$ de la variable (Ici encore il s'agit du minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$.)
Remarquons que pour $x = 0$, f est dérivable et $f'(0) = 0$.
La représentation graphique est donnée à la figure 2.

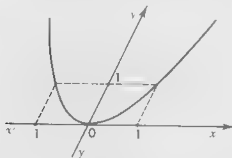


fig. 2

3. Soit la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = x^3 - 3x$. Sa fonction dérivée est définie par $f'(x) = 3(x^2 - 1)$. En utilisant le signe de $f'(x)$ (cf § 6 2) on peut dresser le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘	-2	↗	

Cette fonction f présente donc un maximum relatif pour la valeur -1, $f(-1) = 2$. Elle présente un minimum relatif pour la valeur $+1$ de la variable, $f(1) = -2$. La représentation graphique de f est donnée à la figure 3.

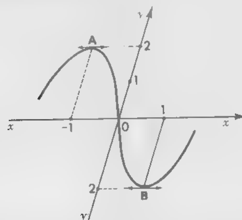


fig 3

Cet exemple met en évidence le fait que la notion d'extremum relatif concerne une propriété de f dans un intervalle inclus dans le domaine de définition D, et non pas dans D tout entier. Ici le maximum relatif $f(-1) = 2$ n'est pas maximum absolu; en effet on a, par exemple, $f(3) = 18 > 2$. De même le minimum relatif $f(1) = -2$ n'est pas minimum absolu car, par exemple, on a

$$f(-3) = -18 < -2.$$

Remarquons aussi que pour -1 et 1 f est dérivable et présente un extremum relatif, nous constatons $f'(-1) = f'(1) = 0$.

c) Cas des fonctions dérivables.

Si f est dérivable sur $]x_0 - h, x_0 + h[$ avec $h > 0$ et si f présente un extremum relatif en x_0, on a $f'(x_0) = 0$.

En effet, supposons par exemple que $f(x_0)$ soit un maximum. On peut trouver h' et h'' vérifiant $0 < h' < h$ et $0 < h'' < h$ tels que :

pour tout x de $]x_0 - h', x_0[$, $m(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$,

pour tout x de $]x_0, x_0 + h''[$ $m(x) \leqslant 0$.

On a donc

$$\lim_{x \to x_0 - 0} m(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} m(x) \leqslant 0;$$

la fonction étant dérivable en x_0, ces deux limites sont égales à $f'(x_0)$ d'où $f'(x_0) \geqslant 0$ et $f'(x_0) \leqslant 0$, donc $f'(x_0) = 0$.
On ferait le même raisonnement pour un minimum relatif en x_0 où f est dérivable.

Réciproquement les théorèmes 2 et 3 du § 6. 2 nous permettent d'énoncer :

Théorème.

Si une fonction f est dérivable dans un intervalle ouvert I contenant x_0, si $f'(x_0) = 0$ et si $f'(x)$ change de signe pour x_0, f présente un extremum relatif pour x_0.

Nous avons constaté la validité de ce théorème dans les exemples 2 et 3 ci-dessus.
Remarquons que ce théorème ne donne qu'une **condition suffisante** pour que f présente un extremum en x_0, par exemple la fonction étudiée à l'exemple 1 ci-dessus ne vérifie pas toutes les conditions du théorème (la fonction f n'est pas dérivable pour $x = 1$), cependant f présente un minimum relatif pour $x = 1$.

D'autre part, si f' existe et si $f'(x_0) = 0$, la condition « $f'(x)$ change de signe pour x_0 » est essentielle pour l'existence d'un extremum en x_0. Considérons par exemple la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3$$

On a $f'(0) = 0$ et, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) > 0$, la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle ne présente pas d'extremum pour $x = 0$ bien que $f'(0) = 0$.

6. 4 FONCTIONS PAIRES

a) Définition.

Définition.

Une fonction f de domaine de définition D est paire si et seulement si

$$(\forall x \in D) \quad f(-x) = f(x)$$

Cette définition entraîne que D est un ensemble constitué de la réunion de deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ « symétriques » par rapport à 0, puisque, dès que $x \in D$ la relation précédente indique que $-x \in D$.
Nous poserons

$$D = D_1 \cup D_2 \quad \text{avec} \quad D_1 \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad D_2 \subset \mathbb{R}_-.$$

D_1 et D_2 sont symétriques par rapport à 0.

EXEMPLES

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = f(x) = x^2$$
Cette fonction est paire. $D_1 = [0, +\infty[$, $D_2 =]-\infty, 0]$.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$. Son domaine de définition est $D =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. On a
$$(\forall x \in D) \quad g(-x) = g(x),$$
$$D_1 = [2, +\infty[, \quad D_2 =]-\infty, -2].$$

3. Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{-x^4 + 5x^2 - 4} = \sqrt{(4 - x^2)(x^2 - 1)}$.
On a $-x^4 + 5x^2 - 4 \geqslant 0$ si et seulement si $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$. Donc
$$D = [-2, -1] \cup [1, 2]$$
On a pour tout x de D, $h(-x) = h(x)$, donc h est paire et
$$D_2 = [-2, -1], \quad D_1 = [1, 2]$$

EXERCICES

Les fonctions suivantes sont-elles paires? Si oui, précisez D_1 et D_2

$f_1 : x \longmapsto |x|$, $\quad f_2 : x \longmapsto \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$,

$f_3 : x \longmapsto \frac{x}{x^2 + 1}$, $\quad f_4 : x \longmapsto \frac{|x|}{x^3 + 1}$,

$f_5 : x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{9 - x^2}}$, $\quad f_6 : x \longmapsto \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2 - 9}}$,

$f_7 : x \longmapsto \sqrt{\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2}}$, $\quad f_8 : x \longmapsto \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + 1}$

b) Comparaison des sens de variation dans D_1 et D_2.

Soit I_1 un intervalle contenu dans D_1 et I_2 l'intervalle symétrique par rapport à 0, I_2 est contenu dans D_2.

Théorème 1.

Si f est constante dans I_1, elle est aussi constante dans I_2 et prend la même valeur que dans I_1.

En effet, f constante dans I_1 signifie qu'il existe une valeur réelle k telle que

(1) $\quad (\forall x \in I_1) \quad f(x) = k.$

La fonction f étant paire, on a

(2) $\quad (\forall x \in D) \quad f(-x) = f(x)$

Si x est une valeur quelconque de I_2, $-x$ appartient à I_1 et, tenant compte de (1) et (2), on en déduit $f(x) = k$, pour toute valeur de I_2.

Théorème 2.

Si f est strictement croissante dans I_1, elle est strictement décroissante dans I_2.

En effet, soit deux valeurs quelconques mais *distinctes* x_2' et x_2'' de I_2; on a $x_2' = -x_1'$ et $x_2'' = -x_1''$ où x_1' et x_1'' sont deux valeurs distinctes de I_1. D'où

(3) $$\frac{f(x_2'') - f(x_2')}{x_2'' - x_2'} = \frac{f(-x_1'') - f(-x_1')}{-x_1'' + x_1'} = -\frac{f(x_1'') - f(x_1')}{x_1'' - x_1'}.$$

Or, f est strictement croissante dans I_1, donc

(4) $$\frac{f(x_1'') - f(x_1')}{x_1'' - x_1'} > 0.$$

Il résulte de (3) et (4) que quels que soient x_2' et x_2'' distincts de I_2 on a

$$\frac{f(x_2'') - f(x_2')}{x_2'' - x_2'} < 0.$$

Par suite, la fonction f est strictement décroissante dans I_2.

Théorème 3.

Si f est strictement décroissante dans I_1, elle est strictement croissante dans I_2.

La démonstration de cette propriété est de même type que la précédente.

c) **Conséquences.**

1. Lorsqu'on a démontré qu'une fonction est paire, il suffit de faire l'étude du sens de variation dans D_1, puisque le sens de variation dans D_2 s'en déduit immédiatement.
2. Représentation graphique en axes orthogonaux.

Soit C la courbe représentative de la fonction paire f. Elle est composée de deux sous-ensembles C_1 et C_2 qui correspondent aux restrictions de f à D_1 et D_2; donc $C = C_1 \cup C_2$. Soit $M_1 = (x_1, f(x_1))$ un *point quelconque* de C_1 (fig. 4). On peut lui associer le point de C_2, $M_2 = (-x_1, f(-x_1)) = (-x_1, f(x_1))$.

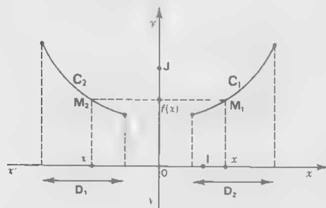


fig 4

On remarque que M_2 est l'image de M_1 dans la symétrie par rapport à l'axe $y'y$, quel que soit M_1 de C_1.
Par conséquent C_1 et C_2 sont symétriques par rapport à $y'y$ et $C = C_1 \cup C_2$ est sa propre symétrique par rapport à $y'y$.

Théorème.

Dans un système d'axes orthogonaux, la courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe $y'y$ pour axe de symétrie

EXEMPLE 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + 1$.
$D = \mathbb{R}$. Pour tout x réel $f(-x) = f(x)$ donc f est paire;

$$D_1 = [0, +\infty[, \quad D_2 =]-\infty, 0].$$

$f'(x) = 2x$, $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante dans D_1, et, par suite, strictement décroissante dans D_2.

Sachant de plus que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ (voir § 4. 12 c), on peut dresser le tableau de variation suivant, limité à D_1 .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

La figure 5 donne la courbe représentative dans un système d'axes orthogonaux.

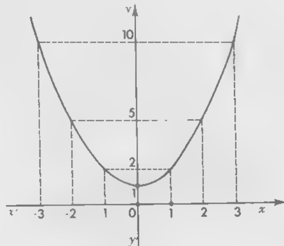


fig. 5

6. 5 FONCTIONS IMPAIRES

a) Définition

Définition.

Une fonction f de domaine de définition D est impaire si et seulement si

$$(\forall x \in D) \quad f(-x) = -f(x).$$

Pour les mêmes raisons que dans le cas d'une fonction paire, $D = D_1 \cup D_2$ avec D_1 et D_2 sous-ensembles respectifs de $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$, symétriques par rapport à 0.

EXEMPLES

1. Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. On a $D = \mathbb{R}^*$ et

$$(\forall x \in D) \quad f(-x) = -f(x) = -\frac{1}{x}$$

Donc cette fonction est impaire

$$D_1 =]0, +\infty[, \quad D_2 =]-\infty, 0[$$

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = -x^3 + 3x$. On a $D = \mathbb{R}$ et

$$(\forall x \in D) \quad g(-x) = -g(x) = x^3 - 3x$$

Cette fonction est donc impaire et l'on a :

$$D_1 = [0, +\infty[\quad \text{et} \quad D_2 =]-\infty, 0]$$

3. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. On a $D = \mathbb{R}^*$ et

$$(\forall x \in D) \quad h(-x) = -h(x) = -\frac{x^2 - 1}{x}.$$

h est donc une fonction impaire définie dans $D_1 =]0, +\infty[$ et $D_2 =]-\infty, 0[$

EXERCICES

Les fonctions suivantes sont-elles impaires? Si oui précisez D_1 et D_2.

$f_1 : x \longmapsto x,$ $\qquad f_2 : x \longmapsto x^3$

$f_3 : x \longmapsto \frac{|x|}{x},$ $\qquad f_4 : x \longmapsto \frac{x^3 + 1}{x},$

$f_5 : x \longmapsto x^5 - 3x^3 + 2x,$ $\qquad f_6 : x \longmapsto \frac{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}}{x^3}.$

c) Comparaison des sens de variation dans D_1 et D_2.

Soit I_1 un intervalle contenu dans D_1 et I_2 l'intervalle symétrique par rapport à 0, I_2 est contenu dans D_2.

Théorème 1.
Si f est constante dans I_1, elle est constante dans I_2, et les valeurs prises par f dans ces deux intervalles sont opposées.

En effet, si f est constante dans I_1, il existe une valeur réelle k telle que

(1) $\qquad (\forall x \in I_1) \quad f(x) = k$

f étant impaire on a

(2) $\qquad (\forall x \in D) \quad f(-x) = -f(x)$

Si x est une valeur quelconque de I_2, $-x$ appartient à I_1 et, tenant compte de (1) et (2), on en déduit : $f(x) = -k$, pour toute valeur de I_2

Théorème 2.
Si f est strictement croissante dans I_1, elle est strictement croissante dans I_2.

En effet, soit deux valeurs quelconques mais *distinctes* x'_2 et x''_2 de I_2; on a $x'_2 = -x'_1$ et $x''_2 = -x''_1$, où x'_1 et x''_1 sont deux valeurs distinctes de I_1. D'où

(3) $$\frac{f(x''_2) - f(x'_2)}{x''_2 - x'_2} = \frac{f(-x''_1) - f(-x'_1)}{-x''_1 + x'_1} = \frac{-f(x''_1) + f(x'_1)}{-x''_1 + x'_1} = \frac{f(x''_1) - f(x'_1)}{x''_1 - x'_1}$$

Or, f est strictement croissante dans I_1, donc :

(4) $$\frac{f(x''_1) - f(x'_1)}{x''_1 - x'_1} > 0.$$

Il résulte de (3) et (4) que, quels que soient x'_2 et x''_2 distincts de I_2, on a

$$\frac{f(x''_2) - f(x'_2)}{x''_2 - x'_2} > 0.$$

Par suite, la fonction f est strictement croissante dans I_2.

Théorème 3.
Si f est strictement décroissante dans I_1, elle est strictement décroissante dans I_2.

La démonstration est la même que celle du théorème 2, au sens près de l'inégalité.

c) Conséquences.

1. Lorsqu'une fonction est impaire, il suffit de faire l'étude du sens de variation dans D_1, puisque le sens de variation dans D_2 s'en déduit par application des théorèmes précédents
2. Représentation graphique (axes quelconques).

Soit C la courbe représentative de f, fonction impaire.
Elle est composée de deux sous-ensembles C_1 et C_2 qui correspondent aux restrictions de f à D_1 et D_2; donc $C = C_1 \cup C_2$.
Soit $M_1 = (x_1, f(x_1))$ un *point quelconque* de C_1 (fig. 6). On peut lui associer le point $M_2 = (-x_1, f(-x_1)) = (-x_1, -f(x_1))$ qui appartient à C_2. On remarque que les coordonnées de M_2 sont opposées de celles de M_1. Le point M_2 est donc le symétrique de M_1 par rapport à 0 quel que soit M_1 de C_1. Donc C_1 et C_2 sont symétriques par rapport à 0 et $C = C_1 \cup C_2$ est sa propre symétrique par rapport à 0.

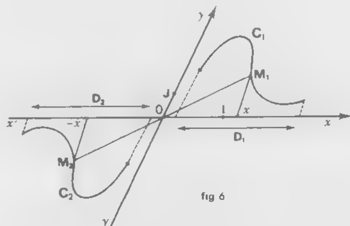


fig 6

Théorème.
La courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

EXEMPLE 4.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x$. On a $D = \mathbb{R}$ et

$$(\forall x \in D) \quad f(-x) = -f(x) = -x^3 + 3x$$

f est donc une fonction impaire.

$$D_1 = [0, +\infty[, \quad D_2 =]-\infty, 0].$$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

Nous étudions son signe dans D_1 :

$x \in]0, +1[\implies f'(x) < 0 \implies f$ est strictement décroissante,

$x \in]+1, +\infty[\implies f'(x) > 0 \implies f$ est strictement croissante

D'autre part, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ (cf. § 4. 12 c).

On obtient ainsi le tableau de variation suivant, relatif à D_1 :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	$+\infty$

et la courbe représentative C (fig. 7).

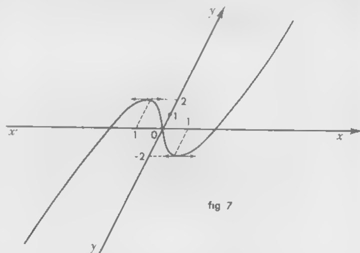


fig 7

6. 6 FONCTIONS PÉRIODIQUES

a) Définition.

Définition.

Une fonction f, de domaine de définition D est périodique si et seulement s'il existe un nombre $T > 0$ tel que

$$(\forall x \in D) \quad f(x + T) = f(x)$$

On dit que T est une *période* de f, ou encore que *f est périodique de période* T.

Il est évident que pour une telle fonction on a pour tout x de D

(1) $\quad f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x),$

(2) $\quad f(x + 3T) = f((x + 2T) + T) = f(x + 2T) = f(x),$

Démontrons un résultat plus général, supposons connu $f(x + kT)$ pour tout x de D et pour une valeur k de $\mathbb{N}^*$.

On aura pour tout x de D

(3) $\quad f(x + (k + 1)T) = f((x + kT) + T) = f(x + kT)$

De (1), (2) (3) on déduit pour tout x de D

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = f(x + 3T) = f(x + 4T) = \dots$$

De même on a pour tout x de D

(4) $\quad f(x) = f((x - T) + T) = f(x - T),$

(5) $\quad f(x - T) = f((x - 2T) + T) = f(x - 2T)$

et plus généralement pour $k \in \mathbb{N}^*$

(6) $\quad f(x - kT) = f(x - (k + 1)T + T) = f(x - (k + 1)T)$

d'où

$$f(x) = f(x - T) = f(x - 2T) = f(x - 3T) = f(x - 4T) = \dots$$

Nous écrirons

$$(\forall x \in D)(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad f(x + kT) = f(x)$$

Il en résulte d'abord que si T est une période de f il en est de même de 2 T, 3 T, 4 T... il y a donc toujours intérêt à considérer **la plus petite période** (strictement positive).

D'autre part il est évident que le domaine de définition D d'une fonction périodique de période T n'est pas quelconque, car si $x \in D$ alors, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, $x + kT \in D$; avant d'étudier la structure d'un tel domaine, étudions des exemples.

EXEMPLES

1. Soit $f(x) = x - E(x)$. Soit k un entier relatif quelconque, on a :
   si $k \leqslant x < k + 1$, $E(x) = k$,
   d'où $f(x) = x - k$ et par conséquent $D = \mathbb{R}$.
   D'autre part si $k \leqslant x < k + 1$ on a $k + 1 \leqslant x + 1 < k + 2$ d'où
   $$f(x + 1) = x + 1 - E(x + 1) = x + 1 - (k + 1) = x - k = f(x)$$
   donc f est périodique de période 1.
   Pour tout entier relatif k, posons
   $$I_k = [k, k + 1[$$
   dans I_0 on a $f(x) = x$
   dans I_k on a $f(x) = x - k$ car dans I_k on a $k \leqslant x < k + 1$ donc $E(x) = k$.

La courbe représentative de f est donc

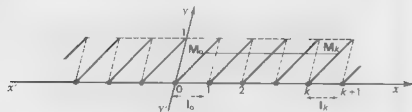


fig 8

Nous remarquons que $D = \mathbb{R}$ est la réunion de tous les intervalles I_k et que l'arc C_k de la courbe représentative C de f correspondant aux valeurs de $x \in I_k$ se déduit de C_0 (correspondant à $x \in I_0$) par la *translation* de vecteur $\vec{T}_k\ (k, 0)$, en effet si $M_0\ (x, f(x) = x)$ décrit C_0, M_k de coordonnées

$$x_k = x + k, \quad y_k = f(x_k) = f(x + k) = f(x) = x$$

décrit C_k. Il suffit donc d'étudier f dans I_0 et de construire C_0.

2. Soit $g(x) = x - E\left(x - \frac{1}{4}\right)$.

On montrera facilement que g est définie dans $\mathbb{R}$ et qu'elle est périodique de période 1. Ici on a ($k \in \mathbb{Z}$) :

si $k \leq x - \frac{1}{4} < k + 1, \quad E\left(x - \frac{1}{4}\right) = k$

Donc au lieu de considérer les intervalles $[k, k+1[$ il est ici plus intéressant de considérer les intervalles

$$I_k = \left[k + \frac{1}{4}, k + \frac{5}{4}\right[$$

car pour $x \in I_k$ on a $g(x) = x - k$.

On construira donc C_0 correspondant à $I_0 = \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right[$, pour $x \in I_0$ on a $g(x) = x$; l'arc C_k correspondant à $I_k = \left[k + \frac{1}{4}, k + \frac{5}{4}\right[$ s'en déduira par la translation $\vec{T}_k\ (k, 0)$. Comme $D = \mathbb{R}$ est la réunion de tous les intervalles I_k, la courbe C sera la réunion de tous les arcs C_k. On fera la figure à titre d'exercice.

Ces exemples nous permettent de voir la structure du domaine de définition D d'une fonction périodique f de période T. Considérons pour tout k de $\mathbb{Z}$ les intervalles

$$I_k = [a + kT, a + (k+1)T[$$

a étant un nombre réel fixé. La réunion de tous les I_k est $\mathbb{R}$.
Dans $I_0 = [a, a + T[$, f est définie pour tous les points de

$$D_0 = D \cap I_0,$$

de même quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, f est définie dans

$$D_k = D \cap I_k.$$

On voit que D_k se déduit de D_0 par la translation, sur l'axe des abscisses, définie par $x \longmapsto x + kT$, car si f est définie pour x de I_0, elle sera définie pour $x + kT$ de I_k. Il en résulte que D est la réunion de tous les domaines partiels D_k ainsi obtenus.

b) Sens de variation d'une fonction périodique.

Nous allons montrer qu'il suffit d'étudier les variations de f dans D_0. Soient deux valeurs distinctes x_k' et x_k'' de D_k; comme $D_k = D \cap I_k$, ces valeurs appartiennent à $I_k = [a + kT, a + (k+1)T[$; considérons

$$x_0' = x_k' - kT \quad x_0'' = x_k'' - kT$$

ces valeurs x_0' et x_0'' sont distinctes et appartiennent à I_0 et on a

$$\frac{f(x_k'') - f(x_k')}{x_k'' - x_k'} = \frac{f(x_0'' + kT) - f(x_0' + kT)}{(x_0'' + kT) - (x_0' + kT)} = \frac{f(x_0'') - f(x_0')}{x_0'' - x_0'}.$$

Il en résulte que, si f est croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $J_0 \subset D_0$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle J_k se déduisant de J_0 par la translation sur l'axe des abscisses définies par $x \longmapsto x + kT$.

Pour étudier les variations de f, périodique de période T, il suffit donc de l'étudier dans $D_0 = D \cap I_0$ *où* $I_0 = [a, a + T[$.

A tout point $M_0\ (x_0, f(x_0))$ de l'arc C_0 représentant f dans $D_0 \subset I_0$ on peut associer le point $M_k\ (x_k, f(x_k))$ où

$$x_k = x_0 + kT, \quad f(x_k) = f(x_0 + kT) = f(x_0).$$

Lorsque M_0 décrit C_0, ce point M_k (fig. 9), décrit l'arc C_k représentant f dans $D_k \subset I_k$.

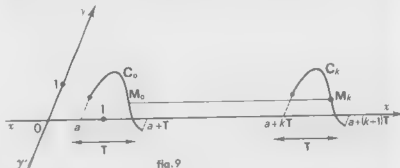


fig. 9

Or le vecteur $\overrightarrow{M_0M_k}$ a pour coordonnées $(kT, 0)$; il est indépendant de $x_0 \in D_0$, il ne dépend que de k; donc C_k *se déduit de* C_0 *par la translation de vecteur* $\vec{T}_k$ de coordonnées $(kT, 0)$.

Comme D est la réunion de tous les domaines D_k ($k \in \mathbb{Z}$), *la courbe représentative C de f est la réunion de tous les arcs* C_k ($k \in \mathbb{Z}$).

REMARQUE

Dans cette étude on choisit donc $I_0 = [a, a + T[$, c'est-à-dire a. Dans l'exemple 1 ci-dessus on a choisi $a = 0$ car dans $[0, 1[$ f était continue et strictement croissante, dans l'exemple 2 ci-dessus il aurait été maladroit de choisir $a = 0$ car pour $x = \frac{1}{4} \in [0, 1[$ la fonction f est discontinue; en revanche en prenant $a = \frac{1}{4}$ on a trouvé g définie, continue et strictement croissante dans $I_0 = \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right[$ puisque dans I_0 on a $g(x) = x$.

EXERCICES

Reconnaître parmi les fonctions suivantes celles qui sont périodiques et indiquer, s'il y a lieu, leur période.

3. $f_1 : x \longmapsto x - \mathrm{E}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, définie dans $\mathbb{R}$.
4. $f_2 : x \longmapsto [x - \mathrm{E}(x)]^2$, —
5. $f_3 : x \longmapsto 2x - \mathrm{E}(2x)$, —
6. $f_4 : x \longmapsto x - \mathrm{E}(2x)$, —
7. $f_5 : x \longmapsto \frac{\mathrm{E}(x)}{x}$, définie dans $\mathbb{R}^*$.

6. 7 PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

a) On détermine le **domaine de définition** D de la fonction f de telle sorte que f soit une application de D dans $\mathbb{R}$. On cherche si la fonction présente une particularité (parité, imparité, périodicité) pour réduire autant qu'il est possible l'intervalle d'étude.

EXEMPLES

$f_1 : x \longmapsto x + 1$ $\quad D_1 = \mathbb{R}$.

$f_2 : x \longmapsto \frac{1}{x}$ $\quad D_2 = \mathbb{R}^*$, fonction impaire.

$f_3 : x \longmapsto \frac{1}{x+1}$ $\quad D_3 = \mathbb{R} - \{-1\}$

$f_4 : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1}$ $\quad D_4 =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, fonction paire.

$f_5 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{-x^2+1}}$ $\quad D_5 =]-1, +1[$, fonction paire.

$f_6 : x \longmapsto \sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$ $\quad D_6 =]-2, +3]$.

b) On indique pour quelles valeurs de x la fonction est **continue.**

c) On détermine l'existence et la valeur des **limites** aux bornes du domaine de définition, si elles existent.

EXEMPLE

Soit :

$$f : x \longmapsto \frac{x+1}{x-3}$$

$$D =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[.$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} = \frac{x}{x} = 1 \qquad (\text{cf § 4.13})$$

$\lim_{x\to3+0} f(x) = +\infty$, car $\lim_{x\to3}(x+1) = 4$ et $\lim_{x\to3+0}(x-3) = +0$

$\lim_{x\to3-0} f(x) = -\infty$, car $\lim_{x\to3}(x+1) = 4$ et $\lim_{x\to3-0}(x-3) = -0$.

d) On cherche quel est le **sens de variation de la fonction**, ce qui nécessite, dans presque tous les cas le calcul de la dérivée (dont on détermine alors le signe).

e) On résume les résultats trouvés dans un **tableau de variation.**

f) On construit la **courbe représentative** et on indique si cette courbe présente des propriétés dans certains systèmes d'axes précisés (symétries, tangentes particulières, ...).

6. 8 EXEMPLES D'ÉTUDE. NOTION DE POINT D'INFLEXION

a) Exemple 1.

La fonction f est définie par

$$f(x) = x^2 \text{ pour } x \geqslant 0,$$
$$f(x) = -2x^2 \text{ pour } x < 0.$$
$$D = \mathbb{R}$$

La fonction f est une fonction continue pour toute valeur de x non nulle (propriété des fonctions polynômes).

Pour $x = 0$, $f(x) = 0$ et $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, donc f est aussi continue.

Finalement, f est une *fonction continue pour toute valeur réelle.*

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2x^2) = -\infty$.

Pour $x > 0$, $f'(x) = 2x > 0$.

Donc, dans $]0, +\infty[$, f est une fonction strictement croissante.

Pour $x < 0$, $f'(x) = -4x < 0$.

Donc, dans $]-\infty, 0[$, f est une fonction strictement croissante.

D'où le tableau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Courbe représentative C. Il n'y a aucune symétrie à signaler pour la courbe C (fig. 10)

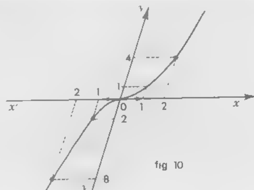


fig. 10

Pour $x = 0$, f admet une dérivée à droite qui est nulle.
Lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives, le coefficient directeur de la tangente à C tend vers 0.
La tangente en O aux deux arcs de courbes qui composent C est donc définie : c'est l'axe $x'x$.

Nous remarquons que, pour $x < 0$ les points de C sont situés dans le demi-plan défini par $y < 0$ et pour $x > 0$, les points de C appartiennent au demi-plan défini par $y > 0$.
La courbe C « traverse » donc sa tangente au point O. On dit que O est un **point d'inflexion** pour C.

b) Exemple 2.

La fonction f est définie par $f(x) = -x^3 + x$.

$$D = \mathbb{R}.$$

D'autre part,

$$(\forall x \in D), \quad f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une *fonction impaire*.
Il suffit alors d'étudier son sens de variation dans $D_1 = \mathbb{R}_+$.
La fonction f est *continue* pour tout x appartenant à D puisque f est une fonction polynôme.
Étude des limites aux bornes de D_1 :
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$.
Sens de variation dans D_1.

$$f'(x) = -3x^2 + 1$$

Donc $f'(x) = 0$ a pour solutions $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Le signe de $f'(x)$ dans D_1 est indiqué dans le tableau de variation.
Tableau de variation.

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\infty$

La fonction f admet un *maximum relatif* $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ pour $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Courbe représentative C.
La fonction étant impaire, quel que soit le repère utilisé, la courbe représentative C est symétrique par rapport à O (fig. 11)
Aux points A $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ et B $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$, correspondant aux extremums de la fonction, la dérivée est nulle donc les tangentes sont parallèles à l'axe $x'x$.
Considérons le point O (0, 0); on a $f'(0) = 1$, la tangente T en O est donc la droite $y = x$. Précisons la position de C par rapport à T dans le voisinage de O; considérons un intervalle $I =]-h, h[$ (avec $h > 0$), soit C_1 le sous-ensemble de C correspondant (fig. 12).
Désignons par M $(x, f(x))$ un point de C et par P le point de la tangente ayant même abscisse que M; P est le point (x, x); ces deux points M et P ont même projection H sur $x'x$ parallèlement à $y'y$, on a

$$\overline{MP} = \overline{HP} - \overline{HM} = x - (-x^3 + x) = x^3.$$

Si $x \in I$ et $x > 0$, on a $\overline{MP} = x^3 > 0$, donc les points de C_1 d'abscisse positive sont situés « au-dessous » de la droite T.
Si $x \in I$ et $x < 0$, on a $\overline{MP} = x^3 < 0$, donc les points de C_1 d'abscisse positive sont situés « au-dessus » de la droite T.

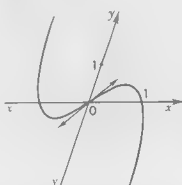


fig 11

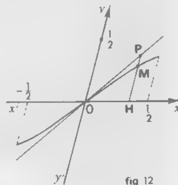


fig 12

Donc au point O la courbe C traverse sa tangente : O est un point d'inflexion de C.
Intuitivement on constate sur la figure 12 que le coefficient directeur m de la tangente à C_1 en un point M $(x, f(x))$ est croissant lorsque x croît de $-h$ à 0 et est décroissant lorsque x croît de 0 à h : la fonction f' doit donc être croissante à gauche de zéro et décroissante à droite de zéro; c'est bien ce que l'on constate puisque, dans le cas étudié, f' est dérivable et que l'on a $(f')' = f''$ d'où $f''(x) = -6x$, on vérifie bien que lorsque x traverse zéro en croissant, $f''(x)$ passe d'une valeur positive à une valeur négative.
Plus généralement nous *admettons* le résultat suivant :

Théorème.
Étant donné une fonction f admettant une dérivée seconde dans $]x_0 - h, x_0 + h[$, avec $h > 0$, si $f''(x_0) = 0$ et si $f''(x)$ change de signe lorsque x traverse x_0, alors la courbe représentative C de la fonction f admet un point d'inflexion d'abscisse x_0.

Remarquons que ce théorème ne donne qu'une condition suffisante d'existence d'un point d'inflexion : la fonction f de l'*exemple 1* ci-dessus le prouve; on a en effet

$$\text{si } x < 0 \qquad f'(x) = -4x,$$
$$\text{si } x > 0 \qquad f'(x) = 2x,$$

donc f' a au point zéro une dérivée à gauche -4 et une dérivée à droite 2, donc f'' *n'est pas définie pour zéro : il y a pourtant un point d'inflexion à l'origine* (fig. 10).

EXERCICE

Étudier les points d'inflexion éventuels des courbes représentatives des fonctions f, g, h définies par

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^4, \quad h(x) = x^5$$

II. Mouvement rectiligne d'un point

6. 9 GÉNÉRALITÉS

a) Notion de temps.

Nous considérons la notion de temps comme une notion primitive.
Une *origine* des temps étant fixée ainsi qu'une *unité de temps*, un *instant est déterminé par un nombre réel.*
Dans ces conditions nous dirons que tel événement s'est produit à l'*instant* t, on dit aussi à la *date* t ou même au temps t.
L'ensemble $\mathbb{R}$ étant totalement ordonné, nous dirons que l'instant t_1 est antérieur (resp. postérieur) à l'instant t_2 si et seulement si $t_1 \leqslant t_2$ (resp. $t_1 \geqslant t_2$).
Étant donné deux instants t_1 et t_2, ($t_1 \leqslant t_2$), à l'intervalle $I = [t_1, t_2]$, intervalle de $\mathbb{R}$, nous associons $t_2 - t_1$, appelée *durée* ou intervalle de temps.

b) Notion de mouvement.

La notion de mouvement est essentiellement *relative* : un voyageur immobile dans un train qui roule est *en mouvement* par rapport au sol et *au repos* par rapport à son wagon.
La cinématique (du grec *kinêma*, mouvement) étudie les mouvements des points et plus généralement des corps par rapport à un *repère*. Par exemple le mouvement d'un point du plan dans l'intervalle $I = [t_1, t_2]$ sera connu si, étant donné un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan considéré, on connaît à chaque instant t de $[t_1, t_2]$ les coordonnées x et y du point; il existera donc deux fonctions f et g de la variable $t \in [t_1, t_2]$ telles que

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

Nous verrons dans le tome II qu'un point de l'espace est, par rapport à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminé par le triplet de ses coordonnées (x, y, z). On connaîtra le mouvement du point $M(x, y, z)$ par rapport au repère choisi, dans l'intervalle $I = [t_1, t_2]$, si on connaît à chaque instant t de I les coordonnées x, y, z de M, il existera donc trois fonctions f, g, h de la variable $t \in [t_1, t_2]$ telles que

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t).$$

L'ensemble des positions de M pour chaque valeur de $t \in I$ est appelé la **trajectoire** du point M dans l'intervalle I. Si la trajectoire est plane on dit que le *mouvement du point est plan*, si la trajectoire est portée par une droite on dit que le *mouvement du point est rectiligne*.
En Première, nous étudierons uniquement le cas du mouvement rectiligne d'un point.
Il nous faudra donc fixer une origine et une unité de temps et un repère $(O, \vec{i})$ *pour la droite D sur laquelle se déplace le point considéré.*

6. 10 MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT. VITESSE. ACCÉLÉRATION

a) Loi horaire.

Dans les conditions indiquées à la fin du paragraphe précédent, considérons un point M en mouvement sur une droite D dans l'intervalle $I = [t_1, t_2]$.
A chaque instant t de I l'abscisse x de M est connue; il existe une fonction numérique de la variable t telle qu'à chaque instant t de I on ait

$$(1) \qquad x = f(t)$$

Cette application f de I dans $\mathbb{R}$ est appelée **la loi horaire** du mouvement du point considéré ou encore la *fonction espace;* la représentation graphique de f est appelée **diagramme des espaces** : l'axe des abscisses est l'axe des temps $t't$, l'axe des ordonnées est l'axe des espaces $x'x$ (fig. 13).
On dit aussi que la relation (1) est l'*équation horaire* du mouvement

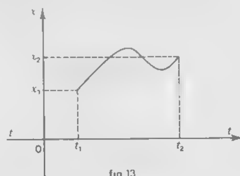


fig 13

b) Vitesse.

Considérons deux points A et B mobiles sur une droite; si pendant le même temps A parcourt 800 m et B 600 m nous disons que A va « plus vite » que B. Cette notion intuitive de « vitesse » est caractérisée par le quotient de l'espace parcouru par la durée mise à le parcourir
Si le point M a une abscisse x_0 au temps t_0 et une abscisse x au temps $t \neq t_0$, nous dirons que entre t_0 et t le mouvement rectiligne de M a été effectué avec la **vitesse moyenne**

$$\frac{x - x_0}{t - t_0}.$$

A chaque couple d'unité de longueur et d'unité de temps est associée une *unité de vitesse*. Les unités de vitesse les plus utilisées sont le *mètre par seconde*, en abrégé m/s et le *kilomètre par heure*, en abrégé km/h.
Nous voyons donc que la vitesse moyenne entre t_0 et t n'est autre que le *taux d'accroissement*

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

de la fonction-espace entre les instants t_0 et t.
Ces considérations nous conduisent à la définition suivante :

Définition.

Un point M étant animé d'un mouvement rectiligne défini sur un intervalle de temps I par

$$x = f(t)$$

on appelle **vitesse** de M à l'instant t_0 de I, la dérivée de la fonction f en t_0, si cette dernière existe.

Si la fonction-espace f est dérivable sur un intervalle $I = [t_1, t_2]$ on définit ainsi la **fonction-vitesse** f'. Pour tout t de I, $v = f'(t)$ est la *vitesse du mobile au temps t*; la représentation graphique de la fonction vitesse f' est appelée **diagramme des vitesses** : l'axe des abscisses est l'axe des temps, l'axe des ordonnées est l'axe des vitesses.

REMARQUES

1. La droite sur laquelle s'effectue le mouvement étant munie d'un vecteur unitaire $\vec{i}$, le vecteur $\vec{V} = v\,\vec{i}$ est appelé *vecteur-vitesse* du point M ayant la vitesse v au temps t; on dit alors que v est la *vitesse numérique* de M; n'utilisant pas le vecteur-vitesse dans ce cours nous dirons simplement que v est la vitesse de M
2. Dans la plupart des mouvements la fonction f est dérivable sur I. Il n'en est pas toujours forcément ainsi, par exemple, lorsqu'il se produit un choc; nous n'étudierons pas de telles situations dans ce cours.

Si dans un intervalle I, $v = f'(t) > 0$, f est strictement croissante dans I (cf. § 6. 2), le point M mobile sur la droite D se déplace dans le sens positif de l'axe porté par D.
Dans les mêmes conditions, si $v = f'(t) < 0$, le point M se déplace dans le sens négatif de cet axe
Si pour t_0, $f'(t_0) = 0$ et si $f'(t)$ change de signe lorsque t traverse t_0 le point M *rebrousse chemin* au point M_0 d'abscisse $f(t_0)$.
Il résulte de cette étude que si l'on change le sens positif de l'axe, la fonction f se change en $-f$, donc f' en $-f'$ et la vitesse v en t change de signe; le signe de la vitesse de M n'est pas une propriété intrinsèque du mouvement de M : il dépend du sens positif choisi sur la droite D; en revanche $|v| = |f'(t)|$ a une signification physique dans l'étude du mouvement du point M.

c) Accélération.

De même que nous avons introduit la vitesse d'un point pour étudier les variations de la fonction espace : $t \longmapsto x = f(t)$, nous allons introduire un élément nouveau pour etudier les variations de la fonction vitesse : $t \longmapsto v = f'(t)$.

Définition.

Un point M étant animé d'un mouvement rectiligne défini sur un intervalle de temps I par

$$x = f(t),$$

on appelle **accélération** de M à l'instant t_0 de I, la dérivée seconde de f en t_0, si cette dernière existe.

Lorsqu'elle existe, l'accélération en t_0 est donc la limite, si t tend vers t_0, du rapport

$$\frac{f'(t) - f'(t_0)}{t - t_0} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

où on a posé $v_0 = f'(t_0)$ et $v = f'(t)$. Ce rapport est le *taux d'accroissement de la vitesse* dans l'intervalle $[t_0, t]$.
Si l'on prend pour unités respectives de longueur et de temps, le *mètre* et la *seconde*, nous savons déjà que la vitesse se mesure en *mètre par seconde* (en abrégé m/s), dans les mêmes conditions l'*accélération* se mesure en *mètre par seconde, par seconde*, en abrégé m/s^2.
Si la fonction espace est deux fois dérivable sur un intervalle $I = [t_1, t_2]$, on définit ainsi la **fonction accélération** f''. Pour tout t de I

$$\gamma = f''(t)$$

est l'accélération du point mobile M au temps t; la représentation graphique de f'' est appelée **diagramme des accélérations** : l'axe des abscisses est toujours l'axe des temps, l'axe des ordonnées est celui des accélérations.

d) **Mouvement accéléré; mouvement retardé.**

Si dans un intervalle de temps I, $\gamma = f''(t) > 0$ (resp. $\gamma = f''(t) < 0$) la fonction $t \longmapsto v = f'(t)$ est strictement croissante (resp. décroissante); mais si l'on change le sens de l'axe porté par D les résultats sont inversés : seules les variations de $|f'|$ sont intéressantes du point de vue physique. D'après les propriétés de l'ordre sur $\mathbb{R}_+$ nous savons que le sens des variations de $|f'|$ est le même que celui de $(f')^2$, or la dérivée à l'instant t de cette fonction est (cf. § 5. 5 c, remarque 3)

$$2f'(t)f''(t) = 2v\gamma$$

Si dans un intervalle de temps I, $v\gamma > 0$, *la valeur absolue de la vitesse croît*, on dit que dans I le **mouvement est accéléré.**
Si dans I, $v\gamma < 0$, la *valeur absolue de la vitesse décroît*, on dit que dans I le **mouvement est retardé** (on dit aussi qu'il est *décéléré*).

REMARQUES

3. L'axe porté par la droite D étant muni d'un vecteur unitaire $\vec{i}$ le vecteur $\vec{\Gamma} = \gamma\,\vec{i}$ est le *vecteur-accélération* à l'instant t, on dit alors que γ est l'*accélération numérique* au temps t. N'employant pas dans ce cours le vecteur-accélération, nous dirons simplement que γ est l'accélération du point M mobile sur la droite D.
4. Pour des mouvements rectilignes très courants il arrive que f'' ne soit pas défini pour t_0. Par exemple au § 7. 6 nous étudierons des mouvements rectilignes du type suivant (démarrage d'un train) :

$$\text{si } t \leqslant 0 \quad f(t) = 0,$$
$$\text{si } t \geqslant 0 \quad f(t) = at^2 \quad (a > 0).$$

On a donc :

$$\text{si} \quad t \leqslant 0 \quad f'(t) = 0$$
$$\text{si} \quad t \geqslant 0 \quad f'(t) = 2\,at,$$

la fonction f' n'est pas dérivable pour $t = 0$: la fonction f' a une dérivée à gauche pour zéro, 0 et une dérivée à droite pour zéro, $2\,a \neq 0$.

6. 11 MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME D'UN POINT

a) Définition et caractérisations du mouvement rectiligne uniforme.

Définition.

On dit que le mouvement rectiligne d'un point M est **uniforme** pendant l'intervalle de temps I, si et seulement si la vitesse de M est constante et non nulle sur I.

Soit $x = f(t)$ l'équation horaire du point M, nous supposons f dérivable et telle que

$$(\forall t \in \mathrm{I}) \qquad f'(t) = a$$

a étant un nombre non nul. Considérons la fonction g définie sur I par

$$(\forall t \in \mathrm{I}) \qquad g(t) = at;$$

pour tout t de I on a $g'(t) = a$, d'où $f'(t) - g'(t) = 0$, du corollaire du théorème I du § 6. 2, il résulte que la fonction $f - g$ est constante sur I; il existe donc un nombre réel b tel que pour tout t de I $f(t) - g(t) = f(t) - at = b$; on a donc

$$(\forall t \in \mathrm{I}) \qquad f(t) = at + b$$

c'est-à-dire que la fonction espace dans un mouvement rectiligne uniforme est une fonction affine; la réciproque est évidente car si f est affine sur I on a $f'(t) = a$ pour tout t de I.
Pour un mouvement uniforme on a aussi $\gamma = f''(t) = 0$; réciproquement si pour tout t de I, $\gamma = 0$, d'après le théorème 1 du § 6. 2 appliqué à la fonction f', on voit que f' est constante; concluons :

Théorème.

Le mouvement rectiligne d'un point est uniforme pendant l'intervalle I si et seulement si sa loi horaire est, sur I, de la forme

$$x = at + b, \; (a \neq 0)$$

ou encore si, sur I, l'accélération est toujours nulle.

b) Diverses formes de l'équation horaire. Diagrammes.

Interprétation géométrique des constantes a et b.

Si pour $t_0 = 0$ le point M est en M_0 et si on pose

$$x_0 = \mathrm{OM}_0$$

on a $f(0) = b = x_0$; d'autre part $f'(t) = a$ est la vitesse constante du point M. On a donc pour tout t de I

$$\boxed{x = vt + x_0}.$$

REMARQUE 1

Il peut arriver que $0 \notin [t_1, t_2]$ intervalle où on étudie le mouvement; x_0 est alors l'abscisse du point où se trouverait le point M à l'instant 0 s'il était animé du mouvement défini par $x = at + b$ pour t réel quelconque.

Si on étudie le mouvement de M pour t réel quelconque, le *diagramme des espaces* est donc une *droite* de coefficient directeur v et d'ordonnée à l'origine x_0; si on étudie le mouvement dans $\mathrm{I} = [t_1, t_2]$, le diagramme des espaces est un segment (fig. 14).

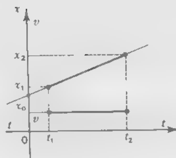


fig 14

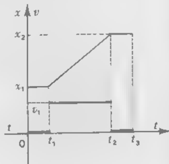


fig 15

Le diagramme des vitesses est une parallèle à l'axe des temps ($\mathrm{I} = \mathbb{R}$) ou un segment parallèle à cet axe ($\mathrm{I} = [t_1, t_2]$).
Sur la figure 14 nous avons représenté à la fois le diagramme des espaces (en noir) et le diagramme des vitesses (en rouge) pour un mouvement effectué dans $\mathrm{I} = [t_1, t_2]$; naturellement sur l'axe des ordonnées il faut deux graduations, une pour les espaces et une pour les vitesses.

Forme réduite de la loi horaire.

Si sur D on passe du repère $(0, \vec{i})$ au repère $(\mathrm{M}_0, \vec{i})$ on aura

$$\overline{\mathrm{M_0M}} = \mathrm{X} = \overline{\mathrm{OM}} - \overline{\mathrm{OM}_0} = x - x_0,$$

d'où la forme réduite de l'équation horaire :

$$\boxed{\mathrm{X} = vt}.$$

1. Un point étant animé d'un mouvement uniforme de vitesse v, trouver f sachant que $f(t_1) = x_1$.
(Réponse : $x = v(t - t_1) + x_1$.)
2. Un point étant animé d'un mouvement uniforme, trouver f sachant que $f(t_1) = x_1$, $f(t_2) = x_2$ $(t_1 \neq t_2,\ x_1 \neq x_2)$.
(Réponse :
$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1},$$
$$x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) + x_1.)$$

Les méthodes et les résultats de ces deux exercices permettent de résoudre tous les problèmes qui peuvent se poser pour un ou plusieurs mobiles animés d'un mouvement uniforme sur une même droite.

REMARQUE 2

La figure 15 donne conjointement le diagramme des espaces et le diagramme des vitesses d'un train animé du mouvement suivant :

1. De $t_0 = 0$ à $t_1 > 0$ il est *au repos* dans une gare G_1, d'abscisse x_1.
2. De t_1 à $t_2 > t_1$, il est animé d'un *mouvement rectiligne uniforme* de vitesse $v_1 > 0$.
3. De t_2 à $t_3 > t_2$, il est au *repos* dans une gare G_2 d'abscisse x_2

La fonction f ainsi définie sur $[t_0, t_3]$ est une fonction affine par morceaux (voir cours de Seconde); f est continue sur $[t_0, t_3]$; mais elle n'est pas dérivable pour t_1 ni pour t_2 : en t_1 il y a une dérivée à gauche 0 et une dérivée à droite v_1; en t_2 il y a une dérivée à gauche v_1 et une dérivée à droite 0.

En fait, en t_1, le train ne prend pas brusquement une vitesse v_1, il accélère de t_1 à t_1' jusqu'à acquérir la vitesse v_1, ensuite à $t_2' < t_2$ il ralentit pour s'arrêter à l'instant t_2. A l'exercice 7.81, nous vous proposerons un schéma de mouvement plus conforme à la réalité

Notons cependant que $t_1' - t_1$ et $t_2 - t_2'$ sont « petits » devant $t_2 - t_1$ et les diagrammes tels que celui de la figure 15 suffisent aux ingénieurs des chemins de fer pour régler la marche des trains . la figure 16 reproduit le graphique des chemins de fer de 6 h à 9 h entre Paris-St-Lazare et Conflans-Sainte-Honorine.

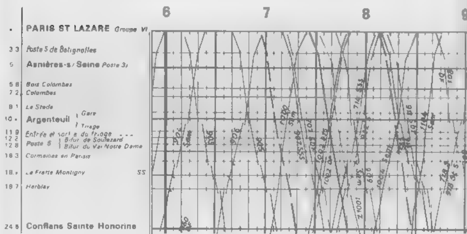


fig.16

EXERCICES

Domaine de définition, parité, imparité, périodicité : 1 à 12.

Symétries de la courbe représentative d'une fonction : 13 et 14.

Étude des variations d'une fonction sans utiliser la dérivée : 15 à 18.

Fonctions affines par intervalles : A, B et 19 à 22.

Mouvement uniforme : 23, 24

Exercices partiellement résolus.

6.A. Étudier la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |2x - 1| + |x| - |2 - x|.$$

On détermine les valeurs $\frac{1}{2}$, 0, 2 *où les nombres* $2x - 1$, x, $2 - x$ *changent respectivement de signe d'où le tableau*

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\lvert 2x - 1 \rvert$		$1 - 2x$		$1 - 2x$	0	$2x - 1$		$2x - 1$	
$\lvert x \rvert$		$-x$	0	x		x		x	
$-\lvert 2 - x \rvert$		$x - 2$		$x - 2$		$x - 2$	0	$2 - x$	
$f(x)$		$-2x - 1$		-1		$4x - 3$		$2x + 1$	

La fonction est continue sur $]-\infty, 0[$, $]0, \frac{1}{2}[$, $]\frac{1}{2}, 2[$, $]2, +\infty[$ *(fonction affine). D'autre part*

$$\lim_{x \to -0} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to +0} f(x) = -1, \quad f(0) = -1$$

donc f *est continue pour* $x = 0$; *même démonstration pour* $\frac{1}{2}$ *et* 2, *donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}$; *c'est une fonction affine par intervalles et continue sur* $\mathbb{R}$.
La fonction $x \longmapsto ax + b$ *est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si* $a > 0$ (resp $a < 0$), *d'où le tableau de variation* (f *est constante sur* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$) *La courbe représentative est la réunion de deux segments et de deux demi-droites.*

6.B. Étudier la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xE(x)$$

où $E(x)$ est défini par ($k \in \mathbb{Z}$) $\quad k \leqslant x < k + 1 \qquad E(x) = k$

On a $\quad k \leqslant x < k + 1 \qquad f(x) = kx;$

f est une fonction affine par intervalle. Posons $I_k =]k, k + 1[$, f est continue sur I_k, d'autre part comme sur I_{k-1} on a f (x) = (k − 1) x

$$\lim_{x \to k-0} f(x) = (k-1)k = k^2 - k, \quad \lim_{x \to k+0} f(x) = k^2, \quad f(k) = k^2;$$

donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$ f est continue à droite; *elle n'est pas continue à gauche pour tout $k \neq 0$ ($k^2 - k \neq k^2$); en revanche f est continue à gauche pour k = 0.*
Donc f est continue pour tout x de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^*$, f est seulement continue à droite pour tout x de $\mathbb{Z}^*$.
La fonction f est strictement croissante sur I_k (k > 0).
La fonction f est strictement décroissante sur I_k (k < 0).
La fonction f est constante (valeur 0) sur I_0.
La courbe représentative est la réunion des segments $[M_kM'_k[$ où M_k a pour coordonnées (k, k^2) et $M'_k (k+1, k(k+1))$.

EXERCICES

6.1 Soit f une fonction paire, on désigne par D' le domaine de définition de la fonction dérivée f'. Montrer que D' est symétrique par rapport à O et que f' est une fonction impaire (on montrera que si pour x_0, f a une dérivée l alors, pour $-x_0$, f est dérivable et a pour dérivée $-l$).

6.2 Soit f une fonction impaire; on désigne par D' le domaine de définition de la fonction dérivée f'. Montrer que D' est symétrique par rapport à O et que f' est une fonction paire (cf. ex. 6.1)

Indiquer les domaines de définition des fonctions f suivantes (ex. 6.3 à 6.12). Précisez si elles sont paires, impaires ou périodiques

6.3 $x \longmapsto x^2 + \frac{1}{x^2}$.

6.4 $x \longmapsto x - \frac{1}{x}$.

6.5 $x \longmapsto \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

6.6 $x \longmapsto \frac{\sqrt{1 + x}}{1 - x}$.

6.7 $x \longmapsto \frac{\sqrt{\quad x \quad 1}}{\sqrt{x \quad 1}}$.

6.8 $x \longmapsto \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$.

6.9 $x \longmapsto \sqrt{x - a}\,\sqrt{-x + b}$, (discuter suivant les valeurs de a et b).

6.10 $x \longmapsto \frac{\sqrt{(x+1)(x-2)}}{x}$.

6.11 $x \longmapsto \frac{1}{E(x)}$,
où pour tout x réel et pour tout k entier relatif on a
$$k \leqslant x < k + 1 \Longrightarrow E(x) = k.$$

6.12 $x \longmapsto \frac{1}{E(1 - x)}$

6.13 Démontrer que la courbe représentative de la fonction f définie par
$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 \quad 1$$
admet la droite Δ d'équation $x = -1$ pour axe de symétrie (on effectuera un changement d'origine du repère).

6.14 Démontrer que la courbe représentative de la fonction f définie par
$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 20x^2 - 25x$$
admet le point ω (1, − 9) pour centre de symétrie.

Les exercices suivants (ex. 6.15 à 6.18) doivent être traités sans utiliser la notion de dérivée. La fonction f considérée est une fonction définie et strictement monotone (croissante ou décroissante) dans un intervalle [a, b].

6.15 La fonction g est définie pour tout x appartenant à $[a, b]$ par
$$g(x) = [f(x)]^3.$$
Comparer les sens de variation de f et g dans $[a, b]$.

6.16 La fonction g est définie pour tout x appartenant à $[a, b]$ par
$$g(x) = \alpha f(x) + \beta.$$
Comparer les sens de variation de f et g dans $[a, b]$.

6.17 La fonction g est définie pour tout x appartenant à $[a, b]$ par
$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$
(on suppose que $f(x)$ n'est nul pour aucune valeur de $[a, b]$). Comparer les sens de variation de f et g

6.18 La fonction g est définie pour tout x appartenant à $[a, b]$ par
$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$
(on suppose que, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$). Comparer les sens de variation de f et g.

Étudier les fonctions suivantes définies pour tout x réel par (ex. 6.19 à 6.22).

6.19 $f(x) = \sqrt{(x-1)^2} + |3x - 1| + |2x|$.
Discuter l'équation $f(x) = \lambda$. $(\lambda \in \mathbb{R})$.

6.20 $f(x) \quad 2x \quad 3| \quad 3x \quad 1 \quad 2x$
Discuter l'équation $f(x) = \lambda$. $(\lambda \in \mathbb{R})$.

6.21 $f(x) = \sup(2x - 1, 4x + 5)$.
Discuter l'équation $f(x) = \lambda$. $(\lambda \in \mathbb{R})$.

6.22 $f(x) = \inf(x + 3, 2, -x - 3)$.
Discuter l'équation $f(x) = \lambda$. $(\lambda \in \mathbb{R})$.

6.23 Une course cycliste « contre la montre » a lieu entre deux villes A et B distantes de 50 km. Les coureurs partent toutes les 3 minutes. Le coureur C_1 roule avec une vitesse constante égale à 38 km/h. Le coureur C_2, parti de A 3 minutes après C_1, souhaite rattraper C_1 avant son arrivée en B. Sachant qu'il roule avec une vitesse constante v, quelle doit être la valeur minimum de v pour que cet événement soit réalisé? Si C_2 avait voulu dépasser C_1 à 40 km de A, quelle aurait dû être la valeur de v?

6.24 Trois villages A, B, C se succèdent dans cet ordre sur une route supposée rectiligne. A et B sont distants de 10 km, B et C sont aussi distants de 10 km.
Un piéton part de A à 8 h, marche avec un mouvement uniforme de vitesse 5 km/h jusqu'en B où il s'arrête pendant 30 mn. Il repart ensuite vers C avec un mouvement uniforme de vitesse 4 km/h.
Un cycliste part de A à 9 h, va jusqu'en C sans s'arrêter avec un mouvement rectiligne uniforme de vitesse 30 km/h. Il repart à 11 h de C et revient en A avec la même vitesse.
a) Étudier le mouvement du piéton.
b) Étudier le mouvement du cycliste.
c) A quelles heures et à quels endroits les deux mobiles passent-ils simultanément? On précisera s'il s'agit d'un dépassement ou d'une rencontre.

7| Fonctions polynômes et applications

Ce chapitre donne des exemples d'études de **fonctions polynômes** *du second degré (section I), du troisième degré (section II) et de degré $n > 3$ (section III). Ces exemples constituent des illustrations variées des résultats obtenus dans les chapitres 4, 5 et 6.*
La représentation graphique de ces fonctions permet d'étudier très simplement la discussion graphique de certaines **équations** *et la résolution graphique d'***inéquations** *ou de* **systèmes d'inéquations** *à deux inconnues.*
Enfin l'étude du **mouvement rectiligne uniformément varié** *trouve sa place naturelle après celle de la fonction polynôme du second degré.*

7. 1 GÉNÉRALITÉS

Nous allons étudier des exemples de **polynômes**, c'est-à-dire de fonctions numériques f définies quel que soit x de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels donnés, appelés **coefficients** du polynôme.
Rappelons que si $a_0 \neq 0$, l'entier naturel n est le **degré** du polynôme.
Toute fonction polynôme est donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
D'après les résultats du § 4. 11 a, un polynôme est une *fonction continue* pour tout x de $\mathbb{R}$ et, d'après les résultats du § 4. 13 b, cette fonction a, lorsque la variable tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la même limite (infinie) que a_0x^n; les résultats dépendent du *signe* de a_0 et de la *parité* de n.
D'autre part f est *dérivable*, sa dérivée f' est dérivable, etc... pour tout x de $\mathbb{R}$ (cf. § 5. 5 e).

I. Fonctions polynômes du second degré et applications

7. 2 EXEMPLES NUMÉRIQUES

a) Exemple 1.

Étude de la fonction f définie par $x \longmapsto x^2$.

1. *Domaine de définition.*

Pour toute valeur réelle de x, on peut calculer $f(x)$; donc $D = \mathbb{R}$; la fonction f est une fonction paire, puisque pour tout x de D on a : $f(-x) = f(x)$. Il suffit donc de l'étudier dans $[0, +\infty[$.

2. *Continuité.*

La fonction f est une fonction polynôme, donc elle est continue pour toute valeur réelle de x.

3. *Recherche de limites.*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$$

4. *Sens de variation.*

Pour déterminer le sens de variation de f, nous calculons sa dérivée f' et nous cherchons le signe de celle-ci. On a $f'(x) = 2x$. Donc pour tout $x \geqslant 0$
$f'(x) = 0 \iff x = 0$
$f'(x) > 0 \iff x \in]0, +\infty[\iff$ (f est strictement croissante dans $\mathbb{R}_+$)

5. *Tableau de variation.*

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 +	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

6. *Courbe représentative C.*

Pour tracer la courbe avec assez de précision (fig. 1), cherchons les coordonnées de quelques points et indiquons-les dans un tableau :

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	4	9

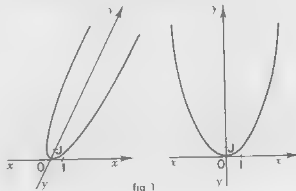


fig 1

On en déduit d'autres, puisque la fonction f est paire

Remarquons d'autre part que la tangente à C au point O est l'axe $x'x$ puisque $f'(0) = 0$ représente le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 0.

Lorsque le repère est orthogonal, C admet l'axe $y'y$ pour axe de symétrie, puisque f est paire

b) **Exemple 2.**

Étude de la fonction f définie par : $x \longmapsto 2x^2 - 4x + 3$.

1. *Domaine de définition.*

Pour toute valeur réelle de x, on peut calculer $f(x)$; donc $D = \mathbb{R}$

2. *Continuité*

La fonction f est continue pour toute valeur réelle de x, puisque f est une fonction polynôme

3. *Recherche de limites.*

Nous avons, $f(x)$ ayant pour x tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$ la même limite que $2x^2$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^2 = +\infty.$$

4. *Sens de variation.*

Calculons la fonction dérivée f' et déterminons son signe.

$f'(x) = 4x - 4 = 4(x - 1)$

Nous avons donc pour tout nombre réel x :

$f'(x) = 0 \iff x = 1,$

$f'(x) > 0 \iff x \in]1, +\infty[\iff$ (f est strictement croissante sur $]1, \infty[$)

$f'(x) < 0 \iff x \in]-\infty, 1[\iff$ (f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$

5. *Tableau de variation.*

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

La fonction présente un minimum égal à 1 pour $x = 1$.

6. *Courbe représentative C.*

Déterminons les coordonnées de quelques points particuliers pour préciser la forme de la courbe (fig. 2).

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	3	1	3	9

$f'(1) = 0$. La courbe C admet donc une tangente parallèle à l'axe $x'x$ au point (1, 1); ce point S correspond au minimum de f.

Lorsque les axes sont orthogonaux, nous remarquons une symétrie de la courbe par rapport à la droite Δ d'équation $x = 1$. Nous allons la justifier

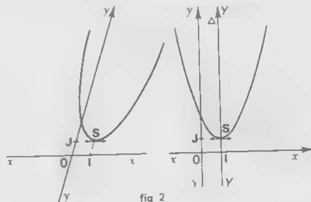


fig 2

Effectuons un changement d'origine de repère de telle sorte que Δ soit le support du nouvel axe des ordonnées Y'Y. Prenons comme origine I (1, 0).

Les formules de changement de repère s'obtiennent en écrivant, pour un point M quelconque du plan :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}, \qquad \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \qquad \overrightarrow{IM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$

d'où

$$x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{i} + X\vec{i} + Y\vec{j} = (X + 1)\vec{i} + Y\vec{j}.$$

Le couple des coordonnées d'un vecteur dans une base étant unique on a donc

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$$

Un point (x, y) appartient à C si et seulement si $y = 2x^2 - 4x + 3$; un point (X, Y) appartiendra donc à C si et seulement si

$$Y = 2(X + 1)^2 - 4(X + 1) + 3 = 2X^2 + 1$$

La courbe C est donc dans le nouveau système de coordonnées la courbe représentative de la fonction

$$X \longmapsto 2X^2 + 1;$$

cette fonction étant paire, C est symétrique par rapport à l'axe Y'Y d'équation $X = 0$, c'est-à-dire par rapport à la droite Δ d'équation $x - 1 = 0$ dans l'ancien système.

EXERCICES

Étude et courbe représentative des fonctions définies par :

1. $x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 \quad 2$
2. $x \longmapsto \frac{1}{4}x^2 + x \quad 1.$
3. $x \longmapsto -3x^2 + 3x + 4$

7. 3 CAS GÉNÉRAL

L'étude de la fonction f définie quel que soit x de $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(avec $a \neq 0$) va être faite en vue de démontrer quelques propriétés générales de ces fonctions du second degré; mais toute étude de fonction particulière devra être traitée comme dans les exemples précédents.

1. *Domaine de définition D.*

C'est $\mathbb{R}$ tout entier.

La fonction f est une fonction polynôme, donc elle est continue pour toute valeur réelle de x.

3. *Recherche de limites.*

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} ax^2.$$

D'où

si $\quad a > 0 \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$

si $\quad a < 0 \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

4 *Sens de variation.*

Il dépend du signe de la dérivée que nous allons déterminer :

$f'(x) = 2ax + b$. D'où les résultats suivants :

$a > 0$	$a < 0$
$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$	$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$
$f'(x) > 0 \iff x \in \left]-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$	$f'(x) > 0 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right[$
$f'(x) < 0 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right[$	$f'(x) < 0 \iff x \in \left]-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$

5. *Tableaux de variation.*

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	↗ $+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	↘ $-\infty$

car $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$

Pour $a > 0$, f présente donc un *minimum* et pour $a < 0$ un *maximum* pour $\frac{-b}{2a}$.

6. *Courbe représentative.*

Effectuons un changement d'origine du repère. Prenons le point $S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ pour origine du nouveau repère, et (x, y) étant le couple des coordonnées de M relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, désignons par (X, Y) le couple des coordonnées du même point M par rapport au repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout point M du plan nous avons

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM}, \qquad \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \qquad \overrightarrow{SM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$

d'où

$$x\vec{i} + y\vec{j} = -\frac{b}{2a}\vec{i} + \frac{4ac - b^2}{4a}\vec{j} + X\vec{i} + Y\vec{j}$$

l'unicité du couple de coordonnées d'un vecteur sur une base nous donne

$$\begin{cases} x = X - \frac{b}{2a} \\ y = Y + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}$$

Un point M (x, y) appartient à C si et seulement si

$$y = ax^2 + bx + c,$$

le point M (X, Y) appartiendra donc à C si et seulement si

$$Y + \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(X - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(X - \frac{b}{2a}\right) + c;$$

tous calculs faits on trouve $Y = aX^2$.

REMARQUE

En mettant le trinôme $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique (voir cours de Seconde) on obtient $Y = aX^2$ plus rapidement :

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

d'où $Y = aX^2$

Vous retiendrez que lorsqu'on fait une translation du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de manière que la nouvelle origine S soit le point représentatif du maximum (ou du minimum) de la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$, l'équation de la courbe représentative de cette fonction dans le nouveau repère est

$$Y = aX^2.$$

Ainsi l'équation cartésienne de C est $y = ax^2 + bx + c$ par rapport à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et l'équation de C par rapport à $(S, \vec{i}, \vec{j})$ est $Y = aX^2$.

Pour connaître la forme des courbes représentatives des fonctions définies par

$$x \longmapsto ax^2 + bx + c,$$

il suffit donc de représenter les courbes des fonctions définies par : $x \longmapsto f_a(x) = ax^2$, puisqu'elles sont isométriques des précédentes, s'en déduisant par une translation. Plus précisément, appelons C la courbe représentative de f et C_a la courbe représentative de f_a par rapport au même repère. On a le schéma suivant :

$$C_a \xrightarrow{t_{\overrightarrow{OS}}} C$$

où $t_{\overrightarrow{OS}}$ désigne la translation définie par le vecteur $\overrightarrow{OS}$.

Toutes ces courbes C_a lorsque a est un nombre réel non nul correspondant à une même définition géométrique : celle de la **parabole**. Nous admettons ce résultat.

Symétrie de la courbe dans un système d'axes orthogonaux.

Dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$, on a trouvé pour équation de C, $Y = aX^2$. La fonction ainsi définie par $X \longmapsto F(X) = aX^2$ est une fonction *paire*. L'axe de repère $(S, \vec{j})$ est donc un *axe de symétrie* pour la courbe C. Dans ce cas, S intersection de C et de l'axe est appelé *sommet* de la courbe. La figure 3 donne dans un repère orthogonal les courbes C_a $(a \neq 0)$ pour diverses valeurs de a.

EXERCICES

Soient les fonctions définies par $x \longmapsto f_a(x) = ax^2$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ et C_a la courbe représentative de f_a.

1. Quelle est l'équation de la transformée de C_a dans l'homothétie de centre 0 et de rapport k $(k \in \mathbb{R}^*)$?
2. Quelle transformation géométrique permet de transformer C_a en C_{-a} lorsque les axes sont orthogonaux?

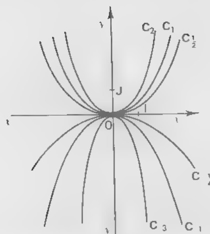


fig 3

7. 4 PROBLÈME RÉSOLU

On considère les fonctions f_m définies pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = (m - 1)x^2 + 2mx + 1 - 3m,$$

où m est un paramètre réel quelconque et leurs courbes représentatives C_m dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. *Étudier, suivant les valeurs de m, le sens de variation de f_m. Faire dans chaque cas un tableau de variation.*

2. *Démontrer que les courbes C_m passent par des points fixes dont on déterminera les coordonnées.*

3. *Combien passe-t-il de courbes C_m par un point donné $M_0(x_0, y_0)$ du plan?*

1. Les fonctions f_m sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, comme toutes les fonctions polynômes. Calculons la dérivée de f_m pour en déduire le sens de variation de f_m. On a

$$f'_m(x) = 2(m - 1)x + 2m.$$

a) $m = 1$. f_1 est une fonction affine :

$$f_1(x) = 2(x - 1), \quad f'_1(x) = 2$$

La dérivée est positive pour toute valeur de x. f_1 est une fonction strictement croissante

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty.$$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $m \neq 1$. f_m est une fonction du second degré.

Sa dérivée s'annule lorsque : $x = -\dfrac{m}{m-1}$

Le signe de cette dérivée est indiqué dans les tableaux de variation ci-dessous, suivant que l'on a $m > 1$ ou $m < 1$ (on justifiera les résultats)

$m < 1$

x	$-\infty$		$\dfrac{m}{m-1}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{(2m-1)^2}{m-1}$	$\searrow$	$-\infty$

$m > 1$

x	$-\infty$		$\dfrac{m}{m-1}$		$+\infty$
$f'_m(x)$			0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{(2m-1)^2}{m-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $f_m\left(\dfrac{m}{m-1}\right) = -\dfrac{(2m-1)^2}{m-1}$; il y a maximum pour $m < 1$ et minimum pour $m > 1$.

D'autre part $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{|x| \to +\infty} (m-1)x^2$, d'où :

Si $m < 1$ $\qquad \lim\limits_{|x| \to +\infty} (m-1)x^2 = -\infty$,

Si $m > 1$ $\qquad \lim\limits_{|x| \to +\infty} (m-1)x^2 = +\infty$.

2. Si les courbes C_m passent par un point fixe $M(x, y)$, les coordonnées de M vérifient :

$$(\forall m \in \mathbb{R}) \qquad (m-1)x^2 + 2mx + 1 - 3m = y,$$

ou encore

$$(\forall m \in \mathbb{R}) \qquad m(x^2 + 2x - 3) - x^2 + 1 - y = 0$$

Les coordonnées x et y d'un point fixe vérifient donc :

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 = 0 \\ -x^2 + 1 - y = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -3 \\ y = -8 \end{cases}$

Il existe donc deux points A (1, 0) et B (− 3, − 8) par lesquels passent toutes les courbes C_m. La figure 4 illustre les résultats trouvés.

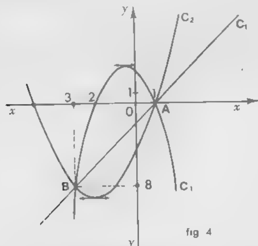


fig 4

3. Si une courbe C_m passe par un point $M_0(x_0, y_0)$, les coordonnées de M_0 vérifient l'équation de C_m. La valeur du paramètre m attachée à la courbe C_m passant par M_0 est donc racine de l'équation :

$$y_0 = (m-1)x_0^2 + 2mx_0 + 1 - 3m$$

ou encore

(1) $\qquad m(x_0^2 + 2x_0 - 3) - x_0^2 - y_0 + 1 = 0$

Premier cas : $x_0^2 + 2x_0 - 3 \neq 0$ c'est-à-dire $x_0 \notin \{1, -3\}$.
L'équation (1) admet une solution unique.
Appelons D la droite d'équation $x = 1$ et D' la droite d'équation $x = -3$.
Le résultat obtenu peut donc s'écrire :
Si $M_0 \notin D \cup D'$, alors il passe par M_0 une courbe C_m unique.
Deuxième cas : $x_0 \in \{1, -3\}$.

$x_0 = 1$ (1) n'admet aucune solution si $y_0 \neq 0$
(1) est vérifiée pour tout m si $y_0 = 0$, ce qui signifie que toutes les courbes passent par le point (1, 0), résultat déjà trouvé à la question précédente (point A).

$x_0 = -3$ (1) n'admet aucune solution si $y_0 \neq -8$.
(1) est vérifiée pour tout m si $y_0 = -8$, c'est-à-dire si M_0 est en B.

Résumons les résultats.

$M_0 \notin D \cup D'$. Il passe par M_0 une courbe C_m unique.

$M_0 \in \{A, B\}$ Toutes les courbes C_m passent par M_0.

$\begin{cases} M_0 \in D \cup D' \\ \text{et } M_0 \notin \{A, B\} \end{cases}$ Aucune courbe C_m ne passe par M_0.

7. 5 RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

a) Exemple.

Étudions le signe de $E(x, y) = y - x^2 + 4x - 5$ *en liaison avec la position du point* $M(x, y)$ *d'un plan rapporté à un repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit C la courbe représentative de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = x^2 - 4x + 5$ (fig. 5) Soit P le point de C qui a même abscisse que M et H le point de $x'x$ qui a même abscisse que M. P a pour coordonnées $(x, x^2 - 4x + 5)$; donc

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = y - (x^2 - 4x + 5) = y - x^2 + 4x - 5 = E(x, y)$$

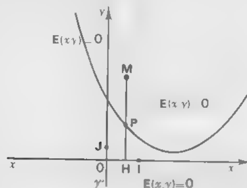


fig 5

On en déduit pour tout x réel

$E(x, y) > 0 \iff \overline{PM} > 0 \iff$ M « au-dessus » de P;

$E(x, y) = 0 \iff \overline{PM} = 0 \iff$ M = P;

$E(x, y) < 0 \iff \overline{PM} < 0 \iff$ M « au-dessous » de P.

La courbe C partage donc le plan en trois sous-ensembles

1. les points situés « au-dessus » de C ont des coordonnées qui vérifient $E(x, y) > 0$,
2. les points qui appartiennent à C ont des coordonnées qui vérifient $E(x, y) = 0$.
3. les points situés « au-dessous » de C ont des coordonnées qui vérifient $E(x, y) < 0$.

b) Cas général.

Soit à étudier le signe de $E(x, y) = y - ax^2 - bx - c$.

Supposons construite la courbe représentative C de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, dans un plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $M(x, y)$ un point

quelconque de ce plan et P le point de C de même abscisse que M. Les coordonnées de P sont $(x, ax^2 + bx + c)$. On a

$$\overline{PM} = y - (ax^2 + bx + c) = E(x, y).$$

Pour toute valeur de x, on a donc les résultats suivants :

$E(x, y) > 0 \iff \overline{PM} > 0 \iff$ M est « au-dessus » de P;

$E(x, y) = 0 \iff \overline{PM} = 0 \iff$ M = P;

$E(x, y) < 0 \iff \overline{PM} < 0 \iff$ M est « au-dessous » de P.

Par suite, la courbe C détermine dans le plan trois sous-ensembles : tout point de C est tel que $E(x, y) = 0$ et, de part et d'autre de C, $E(x, y) \neq 0$ et prend des signes opposés.

Pratiquement, lorsqu'on doit étudier le signe de $E(x, y) = y - (ax^2 + bx + c)$, on construit C, on détermine le signe de $E(x_0, y_0)$, (x_0 et y_0 étant des valeurs numériques, coordonnées d'un point M_0 *n'appartenant pas à* C). Les coordonnées x et y de tout point de la région du plan limitée par C et contenant M_0 donnent à $E(x, y)$ le même signe que le couple (x_0, y_0). Les coordonnées des points de la région du plan située de l'autre côté de C donnent à $E(x, y)$ le signe opposé

c) Exercices résolus.

Exercice 1 Résoudre le système

$$(1) \quad \begin{cases} 2y - x^2 + 2x > 0 \\ x + y - 1 < 0 \end{cases}$$

Quels que soient les nombres réels x et y on a

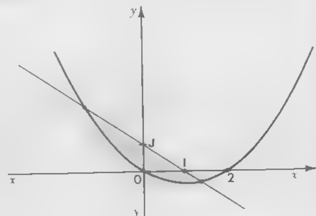
$$(1) \iff \begin{cases} y > +\frac{1}{2}x^2 - x \\ x + y - 1 < 0. \end{cases}$$

Construisons la courbe C représentative de la fonction f définie pour tout x par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

et la droite D d'équation $x + y - 1 = 0$ (fig. 6).

fig 6



Le couple (1, 0) vérifie l'inéquation $2y - x^2 + 2x > 0$. Donc les coordonnées de tous les points situés dans la région A « au-dessus » de la parabole vérifient cette inéquation.
Le couple (0, 0) vérifie l'inéquation $x + y - 1 < 0$. Les coordonnées de tous les points situés dans le demi plan B limité par D et contenant 0 vérifient donc cette inéquation.
Les points dont les coordonnées vérifient le système (1) sont donc ceux de $A \cap B$, partie teintée sur la figure 6, frontière exclue.

Exercice 2. Résoudre l'inéquation

$$(2)\quad (2y - x^2 + 2x)(x + y - 1) > 0$$

Comme dans l'exemple précédent, construisons la courbe C de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ et la droite D d'équation $x + y - 1 = 0$ (fig. 7). La courbe C et la droite D déterminent dans le plan cinq régions (frontières exclues) où les deux nombres $(x + y - 1)$ et $(2y - x^2 + 2x)$ prennent les signes indiqués dans le tableau ci-dessous :

	I	II	III	IV	V
$x + y - 1$					
$2y - x^2 + 2x$		−			

Les points dont les coordonnées vérifient l'inéquation proposée sont donc ceux des régions II, IV et V teintées sur la figure 7.

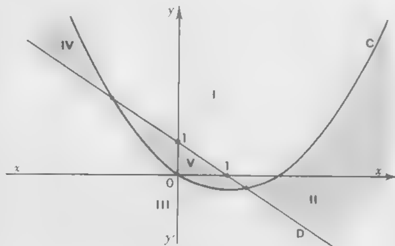


fig 7

7. 6 MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT VARIÉ

a) Définition et caractérisations.

Définition.
On dit que le mouvement rectiligne d'un point M est **uniformément varié** pendant l'intervalle de temps I si et seulement si l'accélération de M est constante et non nulle sur I.

La définition suppose donc que f'' est deux fois dérivable sur I et qu'il existe $a \neq 0$ tel que

$$(\forall t \in I) \qquad f''(t) = a.$$

Autrement dit, pour tout t de I la dérivée de f' est a; considérons la fonction $g : t \longmapsto at$, pour tout t de I on a $g'(t) = a$, donc $f' - g$ est constante sur I (cf. corollaire du théorème 1 du § 6. 2), il existe donc b tel que

$$(\forall t \in I) \qquad f'(t) = at + b.$$

Les théorèmes relatifs aux opérations sur les fonctions dérivables (cf. § 5. 2) nous donnent les résultats suivants

la fonction $t \longmapsto t^2$ a pour fonction dérivée : $t \longmapsto 2t$

— $t \longmapsto \frac{a}{2}t^2$ — $t \longmapsto at$

— $h : t \longmapsto \frac{a}{2}t^2 + bt$ — $h' : t \longmapsto at + b$

donc la fonction f et la fonction h sont telles que, pour tout t de I, $f'(t) = h'(t)$; d'après le corollaire du théorème 1 du § 6. 2 il existe donc c tel que

$$(\forall t \in I) \qquad f(t) = \frac{at^2}{2} + bt + c$$

Réciproquement si l'équation horaire de M est

$$x = f(t) = \frac{at^2}{2} + bt + c$$

pendant l'intervalle I, on a pour tout t de I

$$f'(t) = at + b,$$
$$f''(t) = a.$$

Concluons :

Théorème.
Le mouvement rectiligne d'un point d'équation horaire $x = f(t)$, pendant l'intervalle de temps I, est uniformément varié si et seulement si :
f est, sur I, une fonction polynôme du second degré ou encore si, sur I, f' est une fonction affine non constante.

Interprétation des constantes a, b, c.
Soit un point M animé d'un mouvement uniformément varié d'accélération $\gamma \neq 0$; pour simplifier, nous l'étudierons dans $I = \mathbb{R}$, *dans chaque cas particulier on restreindra l'étude à l'intervalle* $[t_1, t_2]$ *où a lieu effectivement le mouvement.*

A l'instant $t = 0$ le mobile est en M_0 et est animé d'une vitesse v_0, on pose $\overline{OM_0} = x_0$; on a donc

$$x = f(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt + c$$
$$v = f'(t) = at + b$$
$$\gamma = f''(t) = a$$

avec

$$f(0) = c = x_0$$
$$f'(0) = b = v_0$$
$$f''(t) = a = \gamma.$$

Nous avons donc pour tout t réel

(1) $$x = f(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0$$

(2) $$v = f'(t) = \gamma t + v_0$$

b) Étude du mouvement; diagrammes des espaces et des vitesses.

Étudions les variations de la fonction espace f; les résultats du § 7. 3 nous permettent de construire les tableaux de variations ci-dessous.

La fonction f' prend la valeur 0 pour $t = -\frac{v_0}{\gamma}$ et, pour cette valeur du temps, f présente un maximum (si $\gamma < 0$) ou un minimum (si $\gamma > 0$) dont la valeur x_m est

$$x_m = f\left(-\frac{v_0}{\gamma}\right) = \frac{1}{2}\gamma\frac{v_0^2}{\gamma^2} + v_0\left(-\frac{v_0}{\gamma}\right) + x_0 = x_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma}.$$

$\gamma > 0$

t	$-\infty$	$-\frac{v_0}{\gamma}$	$+\infty$
$v = f'(t)$	$-$	0	$+$
$x = f(t)$	$+\infty$ ↘	x_m	↗ $+\infty$

$\gamma < 0$

t	$-\infty$	$-\frac{v_0}{\gamma}$	$+\infty$
$v = f'(t)$	$+$	0	$-$
$x = f(t)$	$-\infty$ ↗	x_m	↘ $-\infty$

Dans tous les cas, c'est-à-dire quel que soit le signe de γ, on a les résultats suivants :

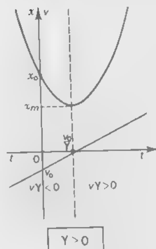
1. $t < -\frac{v_0}{\gamma}$, $v\gamma < 0$,
2. $t > -\frac{v_0}{\gamma}$, $v\gamma > 0$.

L'accélération étant constante, dans le premier cas $\left(t < -\frac{v_0}{\gamma}\right)$ nous dirons que le mouvement est **uniformément retardé** et, dans le deuxième cas $\left(t > -\frac{v_0}{\gamma}\right)$ que le mouvement est **uniformément accéléré**.

Les figures 8 donnent dans chacun des deux cas ($\gamma > 0$ et $\gamma < 0$) conjointement les diagrammes des espaces (en noir) et les diagrammes des vitesses (en rouge).

Le diagramme des espaces est une parabole qui, en axes rectangulaires, a pour axe la droite $t = -\frac{v_0}{\gamma}$ et pour sommet le point $t = -\frac{v_0}{\gamma}$, $x = x_m$.

Le diagramme des vitesses est une droite passant par le point $t = -\frac{v_0}{\gamma}$, $v = 0$



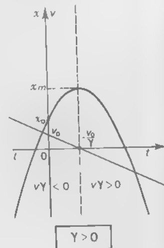


fig 8

Sur ces figures nous constatons que pour deux instants t' et t'' symétriques par rapport à l'instant $t = -\frac{v_0}{\gamma}$ où la vitesse est nulle, le point mobile occupe sur la droite D une même position et, si sa vitesse est v à l'instant t', elle est $-v$ à l'instant t''.

EXEMPLE

$x = f(t) = t^2 - 6t + 17$ dans $I = [1, 7]$

L'accélération γ est égale à $2 > 0$.

On a $v = f'(t) = 2t - 6$; $f'(t) = 0$ pour $t = 3$ d'où le tableau

t	1	3	7
v	-4	0 $+$	8
x	12 ↘	8	↗ 24

Construire à titre d'exercice le diagramme des espaces et celui des vitesses.
Pour $t_1 = 1$, M est en M_1 $(x_1 = 12)$ avec la vitesse $v_1 = -4$, le point se déplace dans le sens négatif de l'axe porté par D.
Pour $1 \leqslant t \leqslant t_2 = 3$, le mouvement est retardé $(v\gamma < 0)$; le point M va de M_1 $(x_1 = 12)$ à M_2 $(x_2 = 8)$; $|v|$ décroît et tend vers zéro lorsque t tend vers $t_2 = 3$.
Pour $t_2 = 3$, v passe d'une valeur négative à une valeur positive, le point rebrousse chemin
Pour $3 \leqslant t \leqslant t_3 = 7$, le point se déplace dans le sens positif de l'axe, le mouvement est accéléré $(v\gamma > 0)$; le point M va de M_2 $(x_2 = 8)$ à M_3 $(x_3 = 24)$ avec une vitesse croissant de 0 à 8.
Ces résultats sont schématisés sur la figure 9

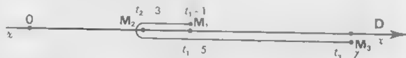


fig 9

On constate que pour $t_1' = 5$ le point M repasse en M_1 $(x_1 = 12)$ avec une vitesse $v_1' = -v_1 = 4$

EXERCICES

Étudier les mouvements d'équations horaires suivantes, dans les intervalles indiqués:

1. $x = t^2 - 6t + 17$ dans $[0, 1]$, puis dans $[4, 7]$.

2. $x = \frac{1}{2}t^2 + 4t - 1$ dans $[4, 8]$, puis dans $[0, 4]$; puis dans $[1, 5]$

On construira dans chaque cas le diagramme des espaces et celui des vitesses.

c) Forme réduite des équations du mouvement uniformément varié.

Mettons le binôme et le trinôme donnant respectivement v et x à l'aide de t sous forme canonique; nous avons, puisque γ est non nul

$$v = \gamma t + v_0 = \gamma\left(t + \frac{v_0}{\gamma}\right),$$

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0 = \frac{1}{2}\gamma\left[\left(t + \frac{v_0}{\gamma}\right)^2 + \frac{2x_0}{\gamma} - \frac{v_0^2}{\gamma^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\gamma\left(t + \frac{v_0}{\gamma}\right)^2 + x_m,$$

en posant $x_m = x_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma}$, abscisse du point M à l'instant où $v = 0$; x_m est l'extremum de la fonction espace. Pour $t = -\frac{v_0}{\gamma}$, on a $x = x_m$.

Prenons comme *nouvelle origine des temps l'instant* $-\frac{v_0}{\gamma}$ *où v est nul* et *comme nouvelle origine sur l'axe où se déplace le point M le point d'ancienne abscisse* x_m; repérant respectivement par T et X le temps et la position de M par rapport à ces nouvelles origines nous avons

$$t = T - \frac{v_0}{\gamma} \quad \text{et} \quad x = X + x_m,$$

d'où les nouvelles équations du mouvement appelées formes réduites

(3) $$\boxed{X = \frac{1}{2}\gamma T^2}$$

(4) $$\boxed{v = \gamma T}$$

d) Relation entre l'abscisse et la vitesse.

Avec les formes réduites on a $v^2 = \gamma^2 T^2 = 2\gamma X$,

(5) $$\boxed{v^2 = 2\gamma X}.$$

Cette formule (5) n'est valable que si l'origine des temps est l'instant où $v = 0$ et l'origine sur D la position du point M à cet instant (où $v = 0$).
Si nous revenons au cas général, dans lequel pour $t = 0$ on a $x = x_0$ et $v = v_0$ on obtient

$$v^2 = 2\gamma(x - x_m) = 2\gamma\left(x - x_0 + \frac{v_0^2}{2\gamma}\right) = 2\gamma(x - x_0) + v_0^2$$

d'ou

(6) $$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2\gamma(x - x_0)}.$$

On voit sur cette formule que si le point M, dans son mouvement, passe deux fois, c'est-à-dire pour t et $t' \neq t$, par le point d'abscisse x, alors à l'instant t et à l'instant t', $|v|$ a la même valeur, nous avons vu plus haut en étudiant les variations de $t \longmapsto f(t)$ et $t \longmapsto f'(t)$, que pour t et t' les vitesses sont opposées.

II. Fonctions polynômes du 3ᵉ degré et applications

7. 7 ÉTUDE D'EXEMPLES

a) Étude de $f : x \longmapsto x^3$.

1. *Domaine de définition et de continuité.*
La fonction f est une fonction polynôme donc $D = \mathbb{R}$ et elle est continue pour tout x de $\mathbb{R}$
Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$; f est donc une fonction impaire. Il suffit d'étudier son sens de variation dans $\mathbb{R}_+$.

2. *Limites*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

3. *Sens de variation.*

$$f'(x) = 3x^2.$$

Pour toute valeur réelle strictement positive de x, $f'(x) > 0$, donc f est une fonction strictement croissante dans $\mathbb{R}_+$.

4. *Tableau de variation.*

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 $+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

5. *Courbe représentative* C.

Déterminons les coordonnées de quelques points pour préciser la forme de la courbe

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	8	27

La fonction f étant une fonction impaire, quel que soit le repère choisi, la courbe représentative admet le point O pour centre de symétrie (fig. 10).

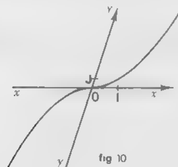


fig 10

Ce point O est un point d'inflexion. En effet, $f'(0) = 0$ indique que la tangente en O est l'axe $x'x$. Pour toute valeur strictement positive de x, $f(x) > 0$, et par suite la partie correspondante de la courbe est située « au-dessus » de l'axe $x'x$. Pour toute valeur strictement négative de x, $f(x) < 0$, et la partie correspondante de la courbe est située « au-dessous » de l'axe $x'x$; C traverse donc sa tangente au point O. On peut justifier ce résultat à l'aide de la dérivée seconde définie par $f''(x) = 6x$: elle s'annule en changeant de signe pour $x = 0$.

b) **Étude de** $f : x \longmapsto -x^3 + 3x^2$.

1. *Domaine de définition et de continuité.*

La fonction f est une fonction polynôme donc $D = \mathbb{R}$ et f est continue pour tout x réel

2. *Étude des limites*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty,$$

puisqu'un polynôme a même limite que son terme de plus haut degré, lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. De même

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty.$$

3. *Sens de variation.*

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

$= -3x(x-2)$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 2$.

Indiquons le signe de $f'(x)$ dans le tableau de variation.

4. *Tableau de variation*

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+4$	↘	$-\infty$

$f(0) = 0$

$f(2) = -8 + 12 = +4.$

La fonction f admet un *minimum relatif* égal à 0 pour $x = 0$ et un *maximum relatif* égal à $+4$ pour $x = 2$.

5. *Courbe représentative* C.

Déterminons les coordonnées de quelques points

x	2	1	0	1	2	3	4
$f(x)$	20	4	0	2	4	0	16

Remarquons, d'autre part, que $f'(0) = 0$ et $f'(2) = 0$. En ces points, la tangente est donc parallèle à l'axe $x'x$.

D'autre part

$$f''(x) = -6x + 6 = -6(x-1)$$

$f''(1) = 0$ et $f''(x)$ change de signe pour $x = 1$.

C admet donc un *point d'inflexion* I, pour $x - 1$, d'ordonnée $+ 2$
Le schéma de C semble symétrique par rapport à I Démontrons que I est effectivement un centre de symétrie pour C (fig. 11).

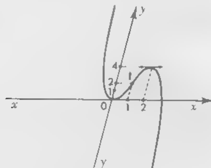


fig 11

Effectuons un changement d'origine du repère. Prenons I comme origine. Soit (X, Y) les coordonnées d'un point M quelconque du plan par rapport au repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$, (x, y) étant ses coordonnées par rapport à $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Nous avons les relations :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OI} = \vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{(puisque I a comme coordonnées (1, 2))}$$
$$\overrightarrow{IM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$$

d'où $$x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{i} + 2\vec{j} + X\vec{i} + Y\vec{j} = (X + 1)\,\vec{i} + (Y + 2)\,\vec{j}.$$

L'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base nous donne les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2. \end{cases}$$

Un point M (x, y) appartient à C si et seulement si

$$y = -x^3 + 3x$$

le point M (X, Y) appartiendra donc à C si et seulement si

$$Y + 2 = -(X + 1)^3 + 3(X + 1);$$

ou encore

$$Y = -X^3 + 3X.$$

La fonction F, définie par $F(X) \quad -X^3 + 3X$ est une fonction impaire Sa courbe représentative qui est C admet I pour centre de symétrie.

c) Étude de $f : x \longmapsto x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 3.$

1. *Domaine de définition et de continuité.*

$$D - \mathbb{R}.$$

2. *Étude des limites.*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$$

3. *Sens de variation.*

$$f'(x) \quad 3x^2 + x + 1.$$

Pour tout x réel $f'(x) > 0$, f est donc une fonction *strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

4. *Tableau de variation.*

x	∞ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	∞ ↗ $+\infty$

5. *Courbe représentative* C.

Indiquons d'abord les coordonnées de quelques points

x	-2	1	$-\frac{1}{6}$	0	1	2
$f(x)$	-11	$\frac{9}{2}$	$\frac{341}{108} \simeq 3{,}16$	-3	$\frac{1}{2}$	9

$$f''(x) = 6x + 1$$

$f''\left(-\frac{1}{6}\right) \;.\; 0$ et $f''(x)$ change de signe pour $x = -\frac{1}{6}$, la courbe (C) admet donc un point d'inflexion I $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{341}{108}\right)$

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right) - 3$$
$$\frac{1}{216} + \frac{1}{72} - \frac{1}{6} - 3$$

$$= -\frac{1}{216} + \frac{3}{216} - \frac{36}{216} - \frac{648}{216}$$
$$= -\frac{682}{216} = -\frac{341}{108}.$$

Cherchons si, comme dans les exemples précédents, ce point d'inflexion est centre de symétrie de C (fig 12)

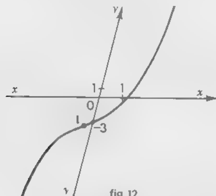


fig 12

Soit (X, Y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$, (x, y) étant les coordonnées du même point dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, nous avons

$$\begin{cases} x = X - \frac{1}{6} \\ y = Y - \frac{341}{108} \end{cases}$$

Par suite, la relation entre X et Y, coordonnées d'un point quelconque de C dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$ est

$$Y - \frac{341}{108} = \left(X - \frac{1}{6}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(X - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(X - \frac{1}{6}\right) - 3.$$

On vérifiera que $Y = X^3 + \frac{11}{12}X$; il en résulte que C est dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de $F : X \longmapsto X^3 + \frac{11}{12}X$, fonction impaire; donc I, point d'inflexion de C est centre de symétrie de C.

d) Exercice résolu

Montrons que la courbe représentative C de la fonction f définie pour tout x par
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$
a un point d'inflexion I et que ce point I est centre de symétrie de C.

En effet on a $f''(x) = 6ax + 2b = 0$ pour $x = x_0 = -\frac{b}{3a}$, et $f''(x)$ change de

signe pour x_0. Le point I (x_0, y_0) où $y_0 = f(x_0)$ est donc le point d'inflexion de C.
Le point M ayant pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ce même point a dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$ des coordonnées (X, Y) telles que

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$$

La courbe C a pour équation
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, elle a donc pour équation dans le système $(I, \vec{i}, \vec{j})$
$$Y + y_0 = a(X + x_0)^3 + b(X + x_0)^2 + c(X + x_0) + d;$$
sans faire tous les calculs nous voyons que cette équation peut s'écrire
$$Y = AX^3 + BX^2 + CX + D;$$
on voit immédiatement que $A = a$ et $D = 0$ car la nouvelle origine I est un point de C. La courbe C est donc, par rapport à $(I, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction F
$$F : X \longmapsto aX^3 + BX^2 + CX.$$
Nous savons que le point I, de coordonnées (0, 0) dans le nouveau repère est point d'inflexion de C, on doit donc avoir $F''(0) = 0$, or
$$F''(X) = 6aX + B;$$
la condition $F''(0) = 0$ entraîne $B = 0$; donc dans le nouveau repère l'équation de C est
$$Y = aX^3 + CX,$$
la fonction F est donc impaire et le point d'inflexion I de C est bien centre de symétrie de C.

7. 8 EXEMPLES D'ÉTUDES D'ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ

a) Discussion d'une équation.

Déterminer le nombre d'éléments de
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x + 2 - m = 0\}$$
suivant les valeurs du paramètre réel m.

1. Le nombre d'éléments de S est le même que le nombre d'éléments de $C \cap D$ où C est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x + 2$ et D la droite d'équation $y = m$.
En effet, l'équation aux abscisses des points d'intersection de C et D s'obtient en éliminant y entre les équations de C et D :

$$\begin{cases} y = x^3 - x + 2 \\ y = m \end{cases}$$

et on obtient l'équation donnée

2. Nous allons d'abord étudier la fonction f, puis construire C.

Étude de f.

$D = \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(x) = 0$ pour $x \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2+\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$2-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗	$+\infty$

Calculons $f\left(\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **où** $\varepsilon = +1$ **ou** -1 **donc** $\varepsilon^2 = +1$,

$$f\left(\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \varepsilon^3 \times \frac{3\sqrt{3}}{27} - \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{3} + 2$$

$$= \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{9} - \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{3} + 2 = \frac{18 - 2\varepsilon\sqrt{3}}{9}$$

d'où $\quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{18-2\sqrt{3}}{9} \quad$ et $\quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{18+2\sqrt{3}}{9}$

Courbe représentative C (fig. 13)

Elle admet deux points où les tangentes sont parallèles à l'axe $x'x$: les points d'abscisses $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

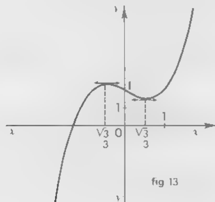


fig 13

La courbe C admet un point d'inflexion I (0, 2) puisque $f''(x) = 6x$ s'annule et change de signe pour $x = 0$ et que $f(0) = 2$.

Ce point I est centre de symétrie. (Faire le calcul ou appliquer le résultat du § 7. 8 d.)

La droite D d'équation $y = m$ est une droite parallèle à l'axe $x'x$.

3. *Nombre d'éléments de* S.

Si $\quad m \in \left]-\infty, 2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right[\cup \left]2 + \frac{2\sqrt{3}}{9}, +\infty\right[, \quad S = \{x'\},$

puisque $C \cap D$ ne contient qu'un seul point.

Si $\quad m \in \left]2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}, 2 + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right[\quad S = \{x', x'', x'''\}$

puisque $C \cap D$ contient 3 points.

Si $\quad m \in \left\{2 - \frac{\sqrt{3}}{9}, 2 + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right\} \quad S = \{x', x''\}$

l'une de ces deux racines est double puisqu'elle correspond au point de contact de C avec D qui lui est tangente (les deux points communs à D et C sont venus se confondre).

b) Résolution approchée d'une équation.

Déterminer à 10^{-2} *près la ou les racines de l'équation*

$$2x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$$

1. Cherchons d'abord le nombre de racines de cette équation en étudiant le nombre de points d'intersection de la courbe représentative C de f définie par

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$$

avec l'axe $x'x$.

f est définie et continue pour toute valeur réelle de x.

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1,$$

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 3,$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) > 0 \qquad \text{(car le discriminant est négatif).}$$

La fonction f est donc strictement croissante dans $\mathbb{R}$. Son tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

(On justifiera les limites indiquées.)

La fonction f étant une application strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, elle prend une fois et une seule toute valeur réelle, en particulier la valeur 0. Il y a donc pour l'équation considérée une *seule racine* x_0.

2 Essayons d'encadrer la racine x_0 par deux nombres différents d'une unité, puis de 10^{-1} unité, puis de 10^{-2} unité, en remarquant que si l'on trouve deux nombres a et b tels que

$$f(a) < 0 \text{ et } f(b) > 0, \quad \text{alors} \quad a < x_0 < b.$$

Nous obtenons les calculs approchés suivants, effectués à la règle à calcul, pour les derniers d'entre eux.

x	x^3	$2x^3$	x^2	$+ 3x$	$f(x)$	
1	1	2	− 1	3	− 5	$1 < x_0 < 0$
0	0	0	0	0	1	
− 0,5	− 0,125	− 0,250	0,25	1,5	− 1	
− 0,4	− 0,064	− 0,128	0,16	− 1,2	0,488	
− 0,3	− 0,027	− 0,054	0,09	0,9	0,044	$-0,3 < x_0 < -0,2$
− 0,2	− 0,008	− 0,016	0,04	0,6	0,344	
− 0,28	− 0,0219	− 0,0438	0,078	0,84	0,0382	
− 0,29	− 0,0244	0,0488	0,084	0,87	0,0028	$-0,30 < x_0 < -0,29$
− 0,30					0,044	

L'équation proposée a donc une seule racine x_0 telle que

$$-0,30 < x_0 < -0,29$$

7. 9 RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'INÉQUATIONS

Résoudre graphiquement le système

(1) $$\begin{cases} y + x^3 \quad 2x < 0 \\ y - x^2 < 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système revient à déterminer l'ensemble des points du plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont les coordonnées (x, y) vérifient (1).

Construisons les courbes représentatives C_1 et C_2 des fonctions définies par

$$f_1(x) \cdot \quad x^3 - 2x \quad \text{et} \quad f_2(x) \quad x^2$$

Les tableaux de variation de f_1 et f_2 sont les suivants (on le vérifiera) :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		$+\infty$
$f_1'(x)$			0	+	0		
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{4\sqrt{6}}{9}$	↗	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	↘	∞

x	∞		0		$+\infty$
$f_2'(x)$			0	+	
$f_2(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

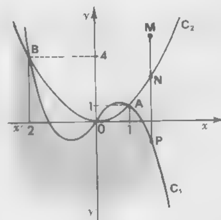


fig 14

Soit un point M (x, y) du plan dont les coordonnées vérifient

(1) $$y + x^3 - 2x < 0$$

Soit P $(x, f_1(x))$ le point de C_1 qui a même abscisse que M, on a

$$\overline{PM} = y - f_1(x) = y + x^3 - 2x.$$

D'après (1), $\overline{PM} < 0$. Cela se traduit graphiquement par le fait que le point M est situé « au-dessous » de la courbe C_1, puisque la propriété que l'on vient d'établir est vraie quel que soit x réel. Appelons R_1 cette région.
Supposons que les coordonnées (x, y) de M vérifient aussi

(2) $$y - x^2 < 0.$$

Le point N de C_2 qui a même abscisse que M a pour ordonnée $f_2(x)$ et il vérifie

$$NM = f_1(x) - x^2$$

D'après (2), quel que soit x réel, $\overline{NM} < 0$. Le point M est donc situé « au-dessous » de la courbe (C_2). Appelons R_2 cette région.
Les deux inéquations devant être vérifiées simultanément, les points dont les coordonnées vérifient le système constituent l'ensemble $R_1 \cap R_2$, ensemble teinté sur la figure 14.
On remarquera que les courbes C_1 et C_2 se coupent aux points d'abscisses x vérifiant

$$x^3 - 2x = x^2$$

c'est-à-dire $$x^3 - 2x + x^2 = 0,$$

ou encore $$x(x-1)(x+2) = 0.$$

On a donc pour C_1 et C_2 les points communs O (0, 0), A (1, 1), B (− 2, 4).

III. Fonctions polynômes de degré $n > 3$ et applications

Dans le cas où f est un polynôme de degré $n = 2$ ou $n = 3$, l'équation $f'(x) = 0$ est au plus du second degré ; lorsque $n > 3$ cette équation est au moins du troisième degré : pour un exemple quelconque il sera difficile d'étudier le signe de la dérivée. Aussi nous nous contenterons d'exemples où l'équation $f'(x) = 0$ a des racines en évidence (0, 1... par exemple) ce qui permettra dans les cas étudiés de trouver toutes les racines de $f'(x) = 0$ et de poursuivre l'étude jusqu'au bout, mais ces exemples ne sont que des cas particuliers.

7. 10 ÉTUDE D'EXEMPLES DE FONCTIONS DU 4e DEGRÉ

a) **Étude de la fonction** $f: x \longmapsto x^4 + x^2$.

1 *Domaine de définition et de continuité*

La fonction f étant une fonction polynôme est définie et continue pour tout x réel. Donc $D = \mathbb{R}$.
La fonction f est une fonction *paire*. Nous allons l'étudier dans $D_1 = \mathbb{R}_+$.

2. *Recherche des limites.*

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} x^4 = +\infty.$$

3 *Sens de variation*

$$f'(x) = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1).$$

Donc pour tout $x > 0$ $f'(x) > 0$; f est donc une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4. *Tableau de variation*

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	0	↗	∞

5. *Courbe représentative* C.
La fonction f étant une fonction *paire*, dans un repère orthogonal la courbe C admet $y'y$ pour axe de symétrie (fig. 15).

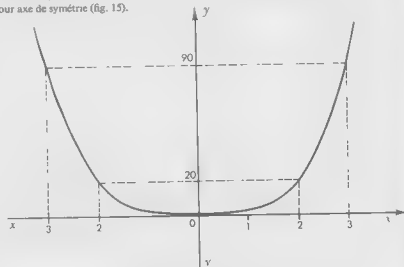


fig 15

$f'(0) = 0$. Donc la tangente en 0 à C est l'axe $x'x$.
$f''(x) = 12x^2 + 2$. $f''(x)$ ne s'annule pas. C n'admet pas de point d'inflexion.
Déterminons les coordonnées de quelques points pour préciser la forme de C.

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	20	90

REMARQUE

La courbe n'est pas une parabole.

b) **Étude de la fonction** $f : x \longmapsto -\frac{3}{4}x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 12x$.

1. *Domaine de définition et de continuité*
La fonction f est une fonction polynôme. Donc elle est définie et continue pour toutes valeurs réelles de x. $D = \mathbb{R}$.
2. *Recherche des limites.*

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \left(-\frac{3}{2}x^4\right) = -\infty$$

3. *Sens de variation*
$f'(x) = -6x^3 + 12x^2 + 6x - 12$
$= -6x(x^2 - 1) + 12(x^2 - 1)$
$= -6(x - 2)(x^2 - 1)$.
Le signe de la dérivée est indiqué dans le tableau de variation
4. *Tableau de variation*

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$(x-2)$							0		
x^2-1			0		0				
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{19}{2}$	↘	$\frac{13}{2}$	↗	4	↘	$-\infty$

5. *Courbe représentative* C.
$f'(-1) = 0, f'(1) = 0, f'(2) = 0$. Donc C admet des tangentes parallèles à l'axe $x'x$ aux points d'abscisses -1, 1, et 2 (fig. 16).

Déterminons les coordonnées de quelques points pour préciser la forme de la courbe.

x	$-1,5$	-1	0	1	2	2,5
$f(x)$	1,65	9,5	0	6,5	4	7,3

$f''(x) = -18x^2 + 24x + 6$
$= 6(-3x^2 + 4x + 1)$;

$f''(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}$ ou $x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$;

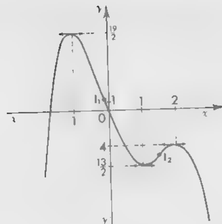


fig 16

$f''(x)$ s'annule et change de signe pour ces deux valeurs de x. C admet donc les points d'abscisses $\frac{2 + \sqrt{7}}{3}$ et $\frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ comme points d'inflexion.

7. 11 EXEMPLES DE DISCUSSION GRAPHIQUE D'ÉQUATIONS DU 4e DEGRÉ

a) **Exemple 1.** *Déterminer suivant la valeur du paramètre m le nombre des racines de l'équation*

(1) $$\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2 + m = 0$$

L'équation (1) est l'équation aux abscisses des points d'intersection de la courbe C d'équation $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$ et de la droite D_m d'équation $y = -m$. Pour une valeur donnée de m, le nombre de racines de (1) est le même que le nombre de points d'intersection de C et D_m.

Nous allons donc étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$, construire sa courbe représentative C et discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de C et D_m.
Étude de la fonction f
La fonction f est définie et continue pour toute valeur réelle de x. Elle est *paire*. Il suffit donc de l'étudier dans $\mathbb{R}_+$.

$$f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$$

Le tableau de variation de f est donc le suivant :

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	0	0	$+$
$f(x)$	2 ↘	2 ↗	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4} x^4 = +\infty.$$

Courbe C : dans un repère orthogonal, elle admet $y'y$ pour axe de symétrie et ses tangentes aux points d'abscisses 2, 0 et 2 sont parallèles à $x'x$ (fig 17)

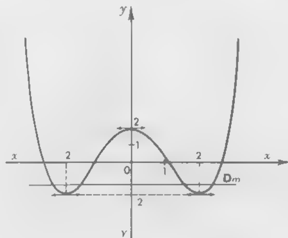


fig 17

Discussion de l'équation (1).

$-m <$ 2 c'est-à-dire $m > 2$	$C \cap D_m = \varnothing$	(1) n'admet aucune solution
$-m = -2$ c'est-à-dire $m = 2$	D_m est tangente à C	(1) admet deux racines doubles égales à -2 et $+2$
$-2 < m < 2$ c'est-à-dire $-2 < m < 2$	D_m coupe C en 4 points deux à deux symétriques par rapport à $y'y$.	(1) admet quatre racines distinctes deux à deux opposées.
$-m = 2$ c'est-à-dire $m = -2$	D_m coupe C en 2 points symétriques par rapport à $y'y$ et est tangente à C au point d'abscisse 0.	(1) admet deux racines opposées et une racine double nulle.
$-m > 2$ c'est-à-dire $m < -2$	D_m coupe C en 2 points symétriques par rapport à $y'y$.	(1) admet deux racines opposées.

REMARQUE

Pour la discussion de l'équation (1), nous n'avions pas besoin des points d'inflexion de C, cherchez-les à titre d'exercice.

b) Exemple 2.

Discuter l'existence des racines de l'équation

$$(2) \qquad \frac{3}{2} x^4 + \frac{1}{2} x^2 - 4 - m = 0$$

et leur position par rapport aux nombres — 1 et 2 suivant les valeurs attribuées au paramètre m

Les racines de l'équation (2) sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C d'équation $y = \frac{3}{2} x^4 + \frac{1}{2} x^2 - 4$ et de la droite D_m d'équation $y = m$.

Nous allons donc étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{2} x^4 + \frac{1}{2} x^2 - 4$, construire sa courbe représentative C et étudier les abscisses des points d'intersection de C et D_m lorsque ces points existent.

Étude de la fonction f.

$$f(x) = \frac{3}{2} x^4 + \frac{1}{2} x^2 - 4$$

Cette fonction f est définie et continue pour toute valeur réelle de x. Elle est *paire*. Il suffit de l'étudier dans $\mathbb{R}_+$.

$$f'(x) \quad 6x^3 + x = x(6x^2 + 1)$$

Le tableau de variation de f est le suivant

x	0	∞
$f'(x)$	0	
$f(x)$	4 ↗	∞

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{3}{2} x^4\right) \qquad \sim$$

Courbe C.

La fonction f étant une fonction paire, dans un repère orthogonal, C admet $y'y$ pour axe de symétrie (fig. 18).

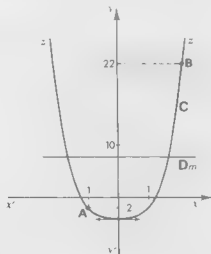


fig. 18

Marquons les points A et B de C d'abscisses respectives -1 et 2 :

$$f(\;\;1) \qquad 2, \quad f(2) \quad 22$$

Donc A a pour coordonnées $(-1, -2)$ et B $(2, 22)$.

Discussion de l'équation (2).

Nous allons discuter le nombre de points d'intersection de C et D_m et comparer les abscisses de ces points d'intersection aux abscisses de A et B, ce qui revient à repérer la position des points d'intersection de C et D_m sur les trois arcs déterminés sur C par A et B.

Appelons $]Az')$ l'arc correspondant à $x < -1$, $]AB[$ celui correspondant à $-1 < x < 2$ et $]Bz)$ celui pour lequel $x > 2$ (fig. 18).

$m < 4$	$C \cap D_m$	(2) n'admet aucune racine
$m \quad 4$	D_m est tangente à C au point d'abscisse 0.	(2) admet une racine double nulle
$4 < m < 2$	D_m coupe C en deux points de l'arc $]AB[$	(2) admet deux racines x' et x'' telles que $-1 < x' < x'' < 2$
$m \quad 2$	D_m coupe C en deux points, le point A et un point de l'arc $]AB[$	(2) admet deux racines x' et x'' telles que $x' = -1 < x'' < 2$.
$2 < m < 22$	D_m coupe C en deux points, l'un de l'arc $]Az')$, l'autre de l'arc $]AB[$.	(2) admet deux racines x' et x'' telles que $x' < -1 < x'' < 2$.
$m \quad 22$	D_m coupe C en deux points, le point B et un point de l'arc $]Az')$.	(2) admet deux racines x' et x'' telles que $x' < -1 < 2 = x''$
$m > 22$	D_m coupe C en deux points situés l'un sur $]Az')$ l'autre sur $]Bz)$	(2) admet deux racines x' et x'' telles que $x' < -1 < 2 < x''$.

7. 12 EXEMPLE DE RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'UNE INÉQUATION

Résoudre graphiquement l'inéquation à deux inconnues x et y .

(1) $$(4y - x^4 + 6x^2 + 2)(-x + 2y + 2) < 0$$

Nous allons déterminer graphiquement les signes de $4y - x^4 + 6x^2 + 2$ et de $-x + 2y + 2$ suivant la position d'un point M (x, y) dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Nous en déduirons l'ensemble des points M de ce plan dont les coordonnées vérifient (1).

Signe de $4y - x^4 + 6x^2 + 2$.

Par analogie avec ce qui a été fait précédemment dans le cas d'inéquations du second et du troisième degré, nous allons étudier la fonction f définie par

$$f(x) \quad \frac{1}{4}x^4 \quad \frac{3}{2}x^2 \quad \frac{1}{2}$$

et construire sa courbe représentative C.

La fonction f est une fonction définie et continue quel que soit x réel, donc $D = \mathbb{R}$. C'est une fonction *paire* que nous allons étudier dans $\mathbb{R}_+$.

$$f'(x) \quad x^3 \quad 3x \quad x(x^2 \quad 3)$$

x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	0	0	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘	$\frac{11}{4}$ ↗	∞

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{4}x^4\right) \qquad \infty$$

La courbe représentative C de cette fonction, que nous représentons dans un système d'axes orthogonaux $x'x$, $y'y$, est symétrique par rapport à $y'y$ (fig. 19) Soit M (x, y) un point quelconque du plan et P le point de C ayant même abscisse que M ; son ordonnée est $f(x)$. Nous avons $\overline{PM} = y - f(x)$. Le signe de $4y - x^4 + 6x^2 + 2$ est donc le même que le signe de $\overline{PM}$ Par suite, $4y - x^4 - 6x^2 + 2$ prend une valeur numérique *positive* lorsqu'on remplace x et y par les coordonnées d'un point M situé « *au-dessus* » de la courbe C et une valeur numérique *négative* lorsque x et y sont les coordonnées d'un point situé « *au-dessous* » de C.

Signe de $-x + 2y + 2$.

Nous pouvons représenter la droite D d'équation $-x + 2y + 2 = 0$. Elle partage le plan en trois régions :

« au-dessus » de D (par exemple pour O (0, 0)) $\quad x \quad 2y - 2 > 0$,

sur D, $-x + 2y + 2 = 0$,

« au-dessous » de D, $\quad x + 2y + 2 < 0$.

Resolution graphique de (1).

Représentons C et D sur un même graphique (fig 19).

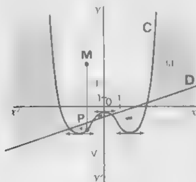


fig 19

Les courbes C et D déterminent dans le plan 7 régions que nous numérotons de I à VII. Nous indiquons dans un tableau les signes pris par $4y - x^4 + 6x^2 + 2$ et $-x + 2y + 2$ dans chacune de ces régions.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
$4y - x^4 + 6x^2 + 2$				$-$	$-$		$+$
$-x + 2y + 2$						$-$	$-$
$(4y - x^4 + 6x^2 + 2)$ $(-x + 2y + 2)$		·				$+$	

Les coordonnées des points situés dans les régions II et VI ou sur les courbes C et D ne vérifient pas (1), puisqu'elles rendent le premier membre de (1) positif ou nul. Les couples (x, y), coordonnées des points des régions I, III, IV, V, VII, vérifient l'inéquation (1) : ces régions ont été teintées sur la figure 19

7. 13 EXEMPLES DE FONCTIONS POLYNOMES DE DEGRÉ $n > 4$

a) Exemple 1.

Étude de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$.

Domaine de définition et de continuité.

La fonction f est une fonction polynôme. Elle est donc définie et continue pour toute valeur réelle de x. $D = \mathbb{R}$

Recherche des limites

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{1}{5} x^5\right).$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Sens de variation

$$f'(x) = x^4 - x^2$$
$$= x^2 (x^2 - 1)$$

$f'(x)$ s'annule pour les valeurs 0, -1 et 1 de la variable, mais *change de signe* seulement pour les valeurs -1 et 1.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{17}{15}$	↘	$+1$	↘	$\frac{13}{15}$	↗	$+\infty$

Courbe représentative C.

Elle admet trois tangentes parallèles à l'axe $x'x$ aux points dont les abscisses sont égales à -1, 0, 1 (fig. 20).

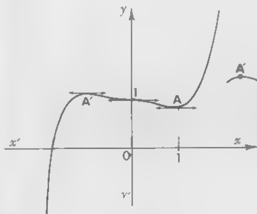


fig 20

fig 21

Le point I (0, 1) est tel que, au voisinage de ce point :

pour $x < 0$, la courbe est « au-dessus » de la tangente

pour $x > 0$, la courbe est « au-dessous » de la tangente.

Ce point I est donc un point d'inflexion de C.

Nous pouvons le vérifier en calculant la dérivée seconde :

$$f''(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$$

Donc $f''(x) = 0$ pour $x \in \left\{ 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.

Par suite, la courbe C admet trois points d'inflexion : le point I et les points I_1 et I'_1 d'abscisses $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $+\frac{\sqrt{2}}{2}$. Leurs ordonnées sont respectivement 1, $1 + \frac{7\sqrt{2}}{120}$, $1 - \frac{7\sqrt{2}}{120}$.

Ils sont mis en évidence sur la figure 21 correspondant aux points d'abscisses comprises entre -1 et 1.

Le schéma de C semble symétrique par rapport au point I. Il en est bien ainsi :

Dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées d'un point M quelconque du plan (X, Y) s'expriment en fonction de ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par : $X = x$, $Y = y - 1$.

La relation entre les coordonnées X et Y d'un point M de (C) s'obtient à l'aide du système :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \\ y = \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{3} x^3 + 1 \end{cases}$$

Il en résulte immédiatement que : $Y = \frac{1}{5} X^5 - \frac{1}{3} X^3$.

La fonction définie par $F(X) = \frac{1}{5} X^5 - \frac{1}{3} X^3$ admet C comme courbe représentative dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$, F est une fonction impaire ; I est donc centre de symétrie pour la courbe C.

b) Exemple 2.

Étude de la fonction $f : x \longmapsto -\frac{1}{6} x^6 + x^5 - x^4$.

Domaine de définition et de continuité.

La fonction f étant une fonction polynôme est définie et continue pour toute valeur réelle de x. $D = \mathbb{R}$.

Recherche des limites.

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \left(-\frac{1}{6} x^6 \right) = -\infty.$$

Sens de variation

$$f'(x) = -x^5 + 5x^4 - 4x^3$$
$$= -x^3 (x^2 - 5x + 4)$$
$$= -x^3 (x - 1)(x - 4)$$

$f'(x)$ s'annule et change de signe pour $x \in \{0, 1, 4\}$.

Tableau de variation

x	∞		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		0		0		
$f(x)$	∞	↗	0	↘	$\frac{1}{6}$	↗	$\frac{256}{3}$	↘	∞

Courbe représentative C.

La courbe C admet trois points où les tangentes sont parallèles à $x'x$ (fig. 22).

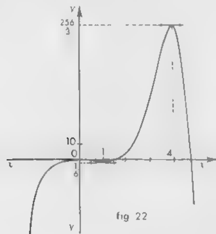


fig 22

EXERCICE

Calculer $f''(x)$ et trouver les points d'inflexion de C.
(On constatera que $f''(0)$ 0 mais que $f''(x)$ ne change pas de signe lorsque x traverse 0, le point $x = 0$ n'est pas un point d'inflexion, d'ailleurs pour $x = 0$ la fonction f admet un maximum relatif.)

EXERCICES

Second degré.

Troisième degré.

Degré $n \geqslant 4$.

Exercices partiellement résolus.

7.A Soit la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{4}{3}$ et sa courbe représentative C

1. Étudier cette fonction. Construire C.
2. Discuter graphiquement l'équation

$$x^2 \quad 3x \quad 4 \quad m \quad 0$$

où x désigne l'inconnue réelle et m un paramètre réel.
3. On considère les droites parallèles à la droite d'équation $y = x$. Certaines d'entre elles coupent C en deux points M′ et M″. Quel est l'ensemble des milieux des segments [M′, M″] lorsque ces droites balayent le plan?
4. Soit les droites D_m, de coefficient directeur m, qui passent par le point A (1, − 3) Pour quelles valeurs de m coupent-elles C en deux points P′ et P″? Lorsque P′ et P″ existent, quelles sont les coordonnées du conjugué harmonique N de A par rapport à P′ et P″? Quel est l'ensemble des points N lorsque M varie?

1. *Le tableau de variation est le suivant* :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{25}{12}$	↗	$+\infty$

2. *Le nombre de racines de l'équation donnée est égal au nombre de points d'intersection de la droite* D_m *d'équation* $y = \frac{m}{3}$ *et de la courbe* C *d'équation* $y = f(x)$.

3. *L'ensemble des milieux des segments* [M′, M″] *est une demi-droite parallèle à y′y et de même sens définie par* :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \end{cases} \quad k \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty \right[$$

4. *Les coordonnées de* N *sont* : $\left(\frac{3m + 13}{3m - 5}, \frac{9m + 15}{3m - 5}\right)$. *On en déduit l'ensemble des points* N :

$$\begin{cases} y = \frac{5x - 4}{3} \\ x \in [-2, 4] - \{1\} \end{cases}$$

7.B Étude de $x \longmapsto f(x) = |x^3 - 6x|$.

1. *On remarquera que f est paire. On l'étudiera dans* $\mathbb{R}_+$.

2. *Dans* $D_1 = [0, +\sqrt{6}]$, $f(x) = -(x^3 - 6x)$.

Dans $D_2 [\sqrt{6}, +\infty[$, $f(x) = x^3 - 6x$.

On peut donc étudier la fonction f_1 *définie par* $f_1(x) = x^3 - 6x$ *définie dans* $\mathbb{R}_+$. *On en déduit le sens de variation de f en remarquant que les restrictions de f et* f_1 *à* D_2 *sont des applications égales, donc qui ont même sens de variation et que, pour tout x appartenant à* D_1, $f(x) = -f_1(x)$. *Ces restrictions de f et* f_1 *à* D_1 *ont donc des sens de variation opposés.*

7.C Étude de $x \longmapsto f(x) = \sup(x^3 - x^2 + 2, x^2 + 5x - 4)$.

On construira les courbes représentatives des fonctions f_1 *et* f_2 *définies par*

$$f_1(x) = x^3 - x^2 + 2, \quad f_2(x) = x^2 + 5x - 4$$

On remarquera que leurs courbes représentatives se coupent en plusieurs points dont un point d'abscisse 1.

On cherchera le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ *et on montrera que* $f(x) = f_1(x)$ *ou* $f(x) = f_2(x)$ *suivant l'intervalle considéré comme l'indique le tableau suivant* :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$f_2(x)$		$f_1(x)$		$f_2(x)$		$f_1(x)$	

et on en déduira le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		0		$\frac{2}{5}$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{41}{4}$	↗	-10	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗	2	↗	20	↗	$+\infty$

7.D Soit f_m la fonction de la variable réelle x définie par

$$f_m(x) = (m + 2)x^3 - 2mx^2 - x + m,$$

où m est un paramètre réel.

a) Démontrer que les courbes représentatives C_m des fonctions f_m passent par des points fixes lorsque m varie.

b) Indiquer le sens de variation de f_m suivant les valeurs de m. Donner un exemple d'étude de f_m dans chaque cas mis en évidence et construire la courbe représentative correspondante dans un système d'axes orthonormés $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Quelles relations doit-il exister entre m' et m'' pour que les tangentes aux courbes représentatives $C_{m'}$ et $C_{m''}$ au point A (1, 1) soient perpendiculaires (le repère était supposé orthonormé).

a) *On écrira l'équation de* C_m *sous la forme*

$$m(x^3 - 2x^2 + 1) + (2x^2 - x - y) = 0$$

et on remarquera que $(x^3 - 2x^2 + 1) = (x - 1)(x^2 - x - 1)$.

Les points fixes sont

$$A(1, 1), \quad B\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right), \quad C\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)$$

b) *On étudiera en particulier les cas* $m + 2 < 0$, $m + 2 = 0$, $m + 2 > 0$.

c) *La relation est* $m'm'' - 5(m' + m'') + 26 = 0$.

7.E Étude de $f : x \longmapsto f(x) = \left| -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 2 \right|$.

La fonction f est paire. Il suffit d'étudier son sens de variation dans $\mathbb{R}_+$. *On trouve le tableau de variation suivant* :

x	0		1		$\frac{\sqrt{10}}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$	2	↘	0	↗	$\frac{9}{8}$	↘	0	↗	$+\infty$

7.F *Étude de* $f : x \longmapsto f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + \left| \frac{3}{2}x^2 - 2 \right|$

Si $x \in D_1 = \left] \quad \infty, \quad \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \infty\right[$, $f(x) \quad \frac{1}{3}x^4 \quad \frac{3}{2}x^2 - 2$.

Si $x \in D_2 \quad \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$, $f(x) \quad \frac{1}{3}x^4 \quad \frac{3}{2}x^2 + 2$.

La fonction f étant paire, il suffit d'étudier successivement les restrictions de f à $\mathbb{R}_+ \cap D_1$ et $\mathbb{R}_+ \cap D_2$, ce qui permet d'indiquer le sens de variation de f dans $\mathbb{R}_+$:

x	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	2	↘	$\frac{16}{27}$	↗	$\frac{5}{16}$	↘	∞

7 G Étude de $f : x \longmapsto f(x) = \sup\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 3x^2, \quad \frac{8}{3}x + \frac{7}{2}\right)$

On montrera d'abord que si $f_1(x) \quad \frac{1}{2}x^4 \quad \frac{8}{3}x^3 + 3x^2$ et $f_2(x) \quad \frac{8}{3}x \quad \frac{7}{2}$ on a les résultats indiqués dans le tableau suivant :

x	∞		1		$+1$		$+\frac{7}{3}$		$+3$		$+\infty$
$f(x)$		$f_1(x)$		$f_2(x)$		$f_1(x)$		$f_2(x)$		$f_1(x)$	

(procéder comme il est dit à l'exercice 7 C, on remarquera que $f_1(x) \quad f_2(x) \quad 0$ en particulier pour $x = -1$ et $x = 1$).

On en déduit après étude de f_1 et f_2 dans les intervalles indiqués

x	∞		-1		1		$\frac{7}{3}$		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{37}{6}$	↘	$\frac{5}{6}$	↘	$-\frac{49}{18}$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$

Exercices sur les fonctions polynômes du second degré.

7.1 On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1.$$

a) Étudier f.
b) Construire la courbe représentative C.
c) Quelles sont les équations des tangentes à C aux points d'abscisses $+2$ et $+5$? Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection?

7.2 On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \quad \frac{1}{2}x^2 + 3x \quad 1$$

a) Étudier f.
b) Construire sa courbe représentative C.
c) Quelles sont les équations des tangentes à C aux points d'abscisses 0 et $+4$? Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection?

7.3 On considère les deux applications f_1 et f_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x) \quad x^2 + x \quad 1, \qquad f_2(x) = \quad x^2 \quad 2x + 3$$

a) Étudier f_1 et f_2
b) Construire leurs courbes représentatives C_1 et C_2
c) La droite D_m d'équation $x \quad m$ coupe C_1 et C_2 respectivement en M_1 et M_2. Quel est l'ensemble des points I, milieux de $[M_1, M_2]$ lorsque m varie?

7.4 Mêmes questions qu'à l'exercice 7.3 avec les applications définies par $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 4$ et $f_2(x) = -x^2 + x + 3$.

7.5 Mêmes questions qu'à l'exercice 7.3 avec les applications définies par

$$f_1(x) \quad -\frac{2}{3}x^2 + 2x \quad 4 \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{4}{3}x^2 + x \quad 5$$

7.6 Dans $\mathbb{R}$ on désigne par sup (a, b) le plus grand des deux nombres réels a et b
a) Étudier l'application f_1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$f_1(x) \quad 3x^2 + 2x \quad 7$. Construire sa courbe représentative C_1
b) Étudier l'application f_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$f_2(x) = -x^2 - 3x + 5$. Construire, sur la même figure que précédemment sa courbe représentative C_2.
c) Étudier l'application f_3 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$f^3(x) = \text{Sup}(3x^2 + 2x - 7, -x^2 - 3x + 5)$.
On fera le tableau de variation de f_3 et on construira sa courbe représentative C_3.

7.7 Mêmes questions qu'à l'exercice 7.6 avec

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1, \quad f_2(x) = x - 1$$

$$f_3(x) = \text{Sup}\left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1, x - 1\right).$$

7.8 Dans $\mathbb{R}$, on désigne par inf (a, b) le plus petit des deux nombres réels a et b.
Étudier et représenter graphiquement sur une même figure les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x) \quad x^2 + x - 1$$
$$f_2(x) \quad x^2 \quad 2x \quad 5$$
$$f_3(x) \quad \text{Inf}(-x^2 + x + 1, x^2 + 2x - 5).$$

Déterminer les coefficients a, b, c de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour que le sommet de la courbe représentative P soit le point S et qu'elle passe par A. Représenter P (ex. 9 à 11).

7.9 S (− 1, 3), A (2, − 3).

7.10 S $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ A (1, − 1).

7.11 S (4, 1), A (− 1, 5).

Déterminer les coefficients a, b, c *de la fonction* f *définie par :* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *de telle sorte que la courbe représentative P de f admette comme axe de symétrie (dans un système d'axes orthogonaux) une droite Δ donnée et passe par les deux points A et B donnés* (ex 7.12 à 7.14).

7.12 $\Delta : x = 2$, A (− 3, 4), B (1, 7).

7.13 $\Delta : x = -\frac{1}{2}$, A (− 4, 3), B (+ 2, − 1).

7.14 $\Delta : x = \frac{3}{2}$, A (1, − 7), B (− 1, + 4).

Déterminer les coefficients a, b, c *de la fonction* f *définie par* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *pour que sa courbe représentative P passe par les points* A, B, C *donnés* (ex. 7.15 à 7.17).

7.15 A (− 2, − 1) B (0, 3) C (3, 1).

7.16 A (− 1, 1) B (1, − 1) C (3, 2).

7.17 A (3, 2) B (− 1, 3) C (1, 1).

Déterminer les coefficients a, b, c *de la fonction* f *définie par* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *pour que sa courbe représentative P passe par les points A et B donnés et soit tangente à la droite D donnée. Quelles sont les coordonnées du point de contact de P et D ?* (ex. 7-18 à 7.20).

7.18 A (− 1, − 2), B (1, 0), D : $y = -3x + 3$.

7.19 A (0, 2), B (1, 0), D : $y = x - 2$.

7.20 A (− 2, 1), B (0, − 1), D : $y = x - 2$.

Déterminer les coefficients a, b, c *de la fonction* f *définie par* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *pour que la courbe représentative P construite dans un système d'axes orthogonaux admette comme axe de symétrie une droite Δ, passe par le point A et soit tangente à la droite D. Indiquer les coordonnées du point de contact de* (P) *et* (D) (ex. 7.21 à 7.23).

7.21 $\Delta : x = \frac{3}{4}$, A (3, 6), D : $x - 3y + 7 = 0$,

7.22 $\Delta : x = \frac{4}{3}$, A (2, − 6), D : $y = 2x - 7$.

7.23 $\Delta : x = -\frac{1}{2}$, A (1, 1) D : $y = -5(x + 2)$.

Déterminer les coefficients a, b, c *de la fonction* f *définie par* . $f(x) = ax^2 + bx + c$ *de telle sorte que la courbe représentative P (en axes rectangulaires) de f admette comme sommet un point S donné et soit tangente à une droite D. Indiquer les coordonnées du point de contact de P avec D*, (ex. 7.24 et 7.25).

7.24 S (1, 3), D : $y = -3x + 2$.

7.25 S (− 4, 2), D : $y + 2x - 3 = 0$.

Déterminer les coefficients a, b, c *d'une fonction* f *définie par* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *de telle sorte que la courbe représentative P de f soit tangente aux droites* D_1 *et* D_2 *et passe par le point A. Indiquer les coordonnées des points de contact de P avec* D_1 *et* D_2, (ex. 7.26 et 7.27).

7.26 $D_1 : y = x + 6$, $D_2 : y = 5x + 6$, A (4, 8).

7.27 $D_1 : y = 5x - 1$, $D_2 : y = -x + 2$, A (2, 12).

Déterminer les coefficients a, b, c *d'une fonction* f *définie par* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *de telle façon que la courbe représentative P de cette fonction soit tangente à trois droites données* D_1, D_2, D_3 *Indiquez les coordonnées des points de contact de P avec chacune de ces droites* (ex. 7.28 et 7.29).

7.28* $D_1 : y = 4x + 1$, $D_2 : y = 16x - 23$, $D_3 : y = -8x + 1$.

7.29* $D_1 : y = x - 2$, $D_2 : y = -x + 1$, $D_3 : y = 3x + 1$.

7.30 Étudier et représenter graphiquement les fonctions définies par
$f(x)$ [illegible] x^2 4 [illegible] x^2 9| et $g(x)$ [illegible] x^2 4 [illegible] x^2 9|

Même question (ex 7.31 à 7.35) qu'à l'exercice 7.30.

7.31 $f(x)$ [illegible] | x^2 [illegible] |2x [illegible] 1

7.32 $f(x) = |x^2 - 4x + 3| + |4 - x^2|$

7.33 $f(x)$ [illegible] | x^2 [illegible] 4x [illegible] 3| [illegible] |4 [illegible] x^2|

7.34 $f(x)$ [illegible] x^2 [illegible] x [illegible] 2| [illegible] | x^2 [illegible] 5x [illegible] 6 [illegible] x^2 [illegible] 2x [illegible] 3|

7.35 $f(x)$ [illegible] 2 x^2 [illegible] x [illegible] 1| [illegible] x^2 [illegible] x [illegible] 2| [illegible] | x^2 [illegible] 4|.

Étudier et représenter graphiquement les fonctions définies par : $x \longmapsto f(x)$ (ex 7.36 à 7.39). *E (x) désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le nombre entier relatif k tel que* $k \leqslant x < k + 1$.

7.36 $f(x) = x - E(x)$.

7.37 $f(x) = [x - E(x)]^2$.

7.38 $f(x) = [x - E(x)]^2 + E(x)$.

7.39 $f(x) = [E(x)]^2 + [2E(x) + 1][x - E(x)]$.

7.40 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - [E(x)]^2$.
a) Étudier cette fonction, en particulier sa continuité pour $x = k$ ($k \in \mathbb{Z}$).
b) Construire sa courbe représentative C. A quelles courbes simples appartiennent les extrémités des arcs qui composent C?

7.41* Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - [E(1 - x)]^2$.
a) Étudier cette fonction.
b) La représenter graphiquement par une courbe C.

7.42 Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = x^2 - E(1 - x)$.

7.43* Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - 2\,[\mathrm{E}(x)]\,(x-1).$$

a) Étudier f et en particulier sa continuité pour $x = k$ ($k \in \mathbb{Z}$).
b) Construire la courbe représentative C de f. A quelles courbes simples appartiennent les extrémités des arcs qui constituent C?

7.44 On considère la courbe représentative P de la fonction f définie par $f(x) = x^2$, construite dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Pour construire la tangente en un point M de P, on construit le vecteur $\overrightarrow{MA} = \vec{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{AT} = a\vec{j}$, où a représente le coefficient directeur de la tangente. Quel est l'ensemble des points T lorsque M décrit P?
b) On construit le vecteur $\overrightarrow{MN}$ directement perpendiculaire à $\overrightarrow{MT}$ et tel que $\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{MT}\|$. Quel est l'ensemble des points N lorsque M décrit P?
c) On construit le point S tel que $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MN})$. Quel est l'ensemble des points S lorsque M décrit P?

7.45* On considère la courbe représentative C de la fonction f définie par $f(x) = x^2$, construite dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) A quelle condition peut-on construire des tangentes issues du point S (x_0, y_0)? (x_0, y_0 sont deux nombres réels donnés)
b) Quel est l'ensemble des points S tels que les tangentes issues de S soient perpendiculaires?

7.46* *a*) Déterminer par leurs équations les tangentes communes aux deux paraboles d'équations :

$$P_1 : y = x^2 - 2x,$$

$$P_2 : y = \frac{x^2}{3} - 2x + 4.$$

On fera une figure représentant P_1, P_2 et leurs tangentes communes.
b) Déterminer les coordonnées des points de contact de ces tangentes avec P_1 et P_2. On appellera M_1 et N_1 les points de contact avec P_1, M_2 et N_2 les points de contact avec P_2. Démontrer que M_1N_1 et M_2N_2 sont parallèles.
c) Démontrer que les deux paraboles sont homothétiques dans une homothétie que l'on précisera.

7.47* Mêmes questions qu'à l'exercice 7.46, avec les données suivantes :
$P_1 : y \;\; x^2 \cdot 4x$,
$P_2 : y = 2x^2 + 4x + 3$.

7.48 Déterminer par leurs équations les tangentes communes aux deux paraboles d'équations :
$P_1 : y \;\; x^2 \;\; 2x - 3$,
$P_2 : y = 3x^2 - 12x + 17$.

7.49 Déterminer par leurs équations les tangentes communes aux deux paraboles d'équations :

$$P_1 : y = x^2 + 4x - 1$$

$$P_2 : y = -x^2 + 6x - \frac{19}{2}.$$

Démontrer que la figure admet un centre de symétrie.

7.50 Soit la fonction f définie pour tout x réel par :

$$f(x) \quad \frac{x^2}{4} \quad x \quad 1$$

a) Étudier cette fonction et la représenter graphiquement par C.
b) On coupe C par une droite D_m de coefficient directeur m passant par A (1, 0). Pour quelles valeurs de m a-t-on : $C \cap D_m \neq \varnothing$? On appelle alors M′ et M″ les points d'intersection.
c) Soit P′ et P″ les projections de M′ et M″ sur $x'x$ parallèlement à $y'y$. Démontrer que, lorsque m varie, il existe deux points fixes A et B tels que (A, B, P′, P″) soient en division harmonique
d) Quel est l'ensemble des conjugués harmoniques de A par rapport à M′ et M″ lorsque m varie?
N. B. Les questions *c*) et *d*) sont indépendantes.

7.51 Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3 - 4x + 3$.
a) Étudier la fonction f et la représenter graphiquement dans un système d'axes orthonormés. $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle C la courbe obtenue.
b) Soit M un point quelconque de C, d'abscisse x, N sa projection orthogonale sur $x'x$, P sa projection orthogonale sur $y'y$. Calculer, en fonction de x, le demi-périmètre $p(x)$ du rectangle ONMP. Étudier sa variation lorsque x décrit $\mathbb{R}$ et la représenter graphiquement
c) Quel est le nombre de racines de l'équation $p(x) = k$, suivant les valeurs de k ($k \in \mathbb{R}_+$)? Résoudre complètement l'équation $p(x) = \frac{13}{4}$.

7.52 *a*) Écrire l'équation d'une parabole isométrique à la parabole d'équation $y = x^2$ et dont le sommet appartient à la droite D d'équation $2x - y - 2 = 0$ (les tangentes aux sommets des paraboles sont supposées parallèles et leurs concavités tournées dans le même sens). On pourra choisir comme paramètre l'abscisse m du sommet, et appeler P_m la parabole correspondante
b) Démontrer que cette parabole P_m reste tangente à une droite Δ indépendante de m lorsque m varie
c) Quel est l'ensemble L des points de ces paraboles P_m où la tangente a comme coefficient directeur -2?
d) Vérifier que D, Δ et L sont parallèles et expliquer ce résultat.

7.53 Soit la fonction f_m de la variable réelle x définie pour tout x par

$$f_m(x) = \frac{1}{2}x^2 - mx + \frac{m(m+2)}{2},$$

où m désigne un paramètre réel. C_m est la courbe représentative de f_m.
a) Démontrer que, pour toutes valeurs de m, les courbes C_m sont isométriques.
b) Quel est l'ensemble L des sommets des courbes C_m lorsque m varie?
c) Démontrer qu'il existe une tangente commune D à toutes les courbes C_m.
d) Quel est l'ensemble Δ des points des courbes C_m où la tangente est parallèle à la droite $y \;\; x \;\; 0$?
e) Quelle particularité présentent les ensembles L, D, Δ? Expliquer ce résultat.

Résoudre graphiquement (ex. 7.54 à 7.65)

7.54 $y - x^2 + 2x - 3 < 0$

7.55 $2y + x^2 - 3x \geqslant 0$

7.56 $x^2 \cdot 6x + 4 \;\; y \leqslant 0$

7.57 $3y \;\; 2x^2 + 4 > 0$

7.58 $(y - x^2)(x^2 + 2x - y) < 0$

7.59 $(y + x)(y - x^2 + 3x) \geqslant 0$

7.60 $(x - 3)\left(y \;\; \frac{1}{2}x^2 + 2x \;\; 5\right) \leqslant 0$

7.61 $(x \;\; 1)^2 (y + 2x^2 \;\; 5) < 0$

7.62 $(3x^2 \;\; 6x + 1 - y)(2x \;\; 3)^2 \geqslant 0$

7.63 $(y \;\; x^2)(x \;\; 1)(y + 2) \leqslant 0$

7.64 $(x + y + 1)(y - 2x^2) \leqslant 0$

7.65 $(2x - 3y + 2)(x^2 - 2y) < 0.$

Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations (ex. 7.66 à 7.71).

7.66 $\begin{cases} y \quad 2x \quad 2 \quad 0 \\ x^2 \quad y \quad 0 \end{cases}$

7.67 $\begin{cases} x \quad 3 \quad \quad 0 \\ x^2 \quad 3 \quad 2y \quad 0 \end{cases}$

7.68 $\begin{cases} x^2 \quad y \quad 0 \\ 2x - 3y + 1 > 0 \\ x^2 + 2x - y < 0 \end{cases}$

7.69 $\begin{cases} \frac{1}{2} x^2 \quad 2x \quad \quad 0 \\ -x^2 + 2x - y \leqslant 0 \\ (x + 1)(x - 2) < 0 \end{cases}$

7.70 $\begin{cases} y - x^2 - 2x = 0 \\ x^2 + y < 0 \end{cases}$

7.71 $\begin{cases} 2y - x^2 + 3 = 0 \\ x^2 \quad 3 \quad \quad 0 \end{cases}$

7.72* Soit l'équation $E_{(x,y)}$ où t représente l'inconnue :

$$t^2 \quad 2(x \quad 2)t \quad - x + 3 = 0$$

(x et y désignent deux paramètres réels).
A chaque équation $E_{(x,y)}$ on associe un point $M(x, y)$ d'un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Discuter, suivant la position du point M dans P, l'existence et le signe des racines réelles de l'équation $E_{(x,y)}$.
Lorsqu'elles existent, ces racines seront désignées par t' et t''.
La courbe intervenant dans la discussion de cette question sera appelée Γ.
b) Quel est l'ensemble des points M de P tels que $-1 < t' < +1 < t''$?
c) Quel est l'ensemble des points M de P tels que $-2 < t' < t'' < +2$?
d) 1. Quel est l'ensemble C_{t_0} des points M de P tels que t_0 (valeur réelle donnée), soit racine de $E_{(x,y)}$.
2. Démontrer que, quel que soit t_0, C_{t_0} est tangente à Γ.

7.73* Soit l'équation $E_{(x,y)}$ où t représente l'inconnue :

$$t^2 \quad 2(x \quad 1)t \quad \quad x^2 \quad 1 \quad 0$$

(x et y désignent deux paramètres réels).
A chaque équation $E_{(x,y)}$, on associe un point $M(x, y)$ d'un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Discuter l'existence et le signe des racines réelles de $E_{(x,y)}$ suivant la position de M dans P
On appelle Γ la courbe intervenant dans cette discussion. Les racines de $E_{(x,y)}$, lorsqu'elles existent, sont désignées par t' et t''.
b) Quel est l'ensemble des points M de P tels que $-1 < t' < +1 < t''$?
c) Quel est l'ensemble des points M de P tels que $-2 < t' < t'' < -1$?
d) 1. Quel est l'ensemble C_{t_0} des points M de P tels que t_0 (valeur réelle donnée) soit racine de l'équation $E_{(x,y)}$.
2. Démontrer que les courbes C_{t_0} sont isométriques lorsque t_0 varie.
3. Quel est l'ensemble des sommets des courbes C_{t_0} lorsque t_0 décrit $\mathbb{R}$?
4. Démontrer que les courbes C_{t_0} sont tangentes à Γ.
5. Vérifier que certaines des courbes tracées au cours des discussions précédentes sont des courbes C_{t_0} qui satisfont aux propriétés qui viennent d'être démontrées
N. B. On pourra choisir $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm. Les figures devront être faites avec précision.

7.74** Soit (P) la parabole d'équation $y = x^2$.
a) Question préliminaire. Que peut-on dire des cordes de cette parabole dont le milieu a une abscisse donnée α?
b) On définit, dans l'ensemble des points de la parabole P, une loi de composition interne notée $\star$ par :

$$M_1 \star M_2 = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} M' \in P \\ \text{et} \\ \text{abscisse de } M' = \frac{1}{2} \text{ somme des abscisses de } M_1 \text{ et } M_2. \end{cases}$$

1. Cette loi est-elle commutative?
2. Est-elle associative?
3. Est-elle distributive par rapport à elle-même?
c) De *a)* et *b*$_3$), déduire des propriétés géométriques de la figure formée par trois points M_1, M_2, M_3 de la parabole et les points :

$$M_1 \star M_2 = M'_3, \quad M_2 \star M_3 = M'_1 \quad \text{et} \quad M_1 \star M_3 = M'_2.$$

d) Résoudre graphiquement l'équation $X \star P = Q$, où P et Q sont deux points donnés de la parabole.
e) Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} X \star Y = C \\ Y \star Z \quad A \\ X \star Z \quad B \end{cases}$$

où A, B, C sont trois points donnés de la parabole, et X, Y, Z, les trois points à déterminer

Mouvement uniformement varié.

7.75 Deux points M_1 et M_2 se déplacent sur un axe $x'x$ de telle sorte que leurs abscisses sont respectivement, en fonction du temps t :

$$x_1 \quad 2t^2 \quad t \quad 3,$$
$$x_2 \quad \quad t^2 \quad t \quad 5$$

a) Étudier les mouvements de ces deux points. Construire les diagrammes correspondants. Déterminer les points de rencontre des deux mobiles et les instants de ces rencontres.
b) Étudier le mouvement du milieu du segment $[M_1, M_2]$.
c) Étudier le mouvement du point qui partage $[M_1, M_2]$ dans le rapport $-\frac{1}{2}$.
d) Existe-t-il une valeur de k telle que le mouvement du point qui partage $[M_1, M_2]$ dans le rapport k soit uniforme?

7.76 Même exercice que le précédent pour les équations de mouvement suivantes :

$$x_1 \quad \frac{1}{2}t^2 \quad 5t \quad 4,$$
$$x_2 \quad \frac{5}{2}t^2 \quad 9t \quad 2$$

7.77 On lâche une pierre dans un puits, sans vitesse initiale. Le puits a 85 m de profondeur Au bout de combien de temps entend-on le bruit du contact de la pierre avec l'eau qui est au fond du puits, sachant que l'accélération dans le mouvement rectiligne uniformément accéléré pris par la pierre est tel que : $|g| = 9{,}81$ m/s^2 et que le son a un mouvement rectiligne uniforme de vitesse 340 m/s?

7.78* Même problème que le précédent, mais on ne connaît pas la profondeur du puits, on la mesure. On sait que l'on entend le bruit du contact de la pierre avec l'eau qui est au fond du puits 10 secondes après que l'on ait lâché la pierre.
Quelle est la profondeur du puits?

7.79 On considère un mouvement uniformément varié, tel qu'à l'instant $t = 0$ l'abscisse du mobile soit nulle, ainsi que sa vitesse, et qu'à l'instant t_1, son abscisse soit x_1 et sa vitesse v_1 (on supposera que t_1, x_1, v_1 sont tous trois positifs). L'accélération est notée γ.
Compléter le tableau suivant :

t_1	x_1	v_1	γ
	1 km	100 km/h	
36 s		90 km/h	
54 s	300 m		
	270 m	36 km/h	
2 mn	3 km		
3 mn		90 km/h	

On montrera ensuite, que de façon générale, si deux des trois nombres t_1, x_1, v_1 sont connus, on peut calculer le troisième.

7.80 On lance une balle verticalement, vers le haut, avec une vitesse initiale de $2\sqrt{35}$ m/s. Le départ a lieu à 1 m du sol. La balle retombe et rebondit sur le sol. A chaque fois qu'elle rebondit, sa vitesse change de sens et la valeur absolue de cette vitesse perd 20 % de sa valeur.
a) Étudier le mouvement de la balle jusqu'au 3e rebond.
b) Au bout de combien de rebonds la hauteur atteinte par la balle reste-t-elle inférieure à 1 m?
Les unités utilisées sont le mètre et la seconde. On prendra pour valeur absolue de l'accélération : 10 m/s².

7.81 Un train T part d'une gare A. Il prend un mouvement rectiligne uniformément accéléré, jusqu'à un endroit A′ situé à 3 km de A. En ce point A′, il a alors une vitesse de 120 km/h. Il poursuit son trajet jusqu'en B′ situé à 30 km de A′, avec un mouvement rectiligne uniforme de vitesse 120 km/h. Au passage en B′, à 1 km d'une gare B, il freine en prenant un mouvement rectiligne uniformément retardé, et arrive dans la gare B avec une vitesse nulle.
Étudier le mouvement de T entre A et B. Quelle est la vitesse moyenne de T entre A et B?

7.82 Un train T part d'une gare A. Il prend un mouvement rectiligne uniformément accéléré jusqu'à un endroit A′ situé à 2 km de A. En ce point, il a alors une vitesse v. Il poursuit son trajet jusqu'en B′ situé à 25 km de A′ avec un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v. En B′, il prend un mouvement uniformément retardé qui porte sa vitesse de la valeur v à la valeur zéro à son arrivée en B situé à 720 m de B′.
Que vaut v, sachant que la vitesse moyenne de T entre A et B est 100 km/h?

7.83 Un train T allant de Paris à Toulouse, passe à Vierzon et à Châteauroux sans arrêts dans ces gares, mais avec une vitesse réduite à 100 km/h. La distance de Vierzon à Châteauroux est de 63 km. Après avoir franchi la gare de Vierzon, T prend un mouvement uniformément accéléré, qui porte sa vitesse de la valeur 100 km/h à la vitesse 150 km/h (ce mouvement uniformément accéléré dure 2 mn). Puis T poursuit sa route vers Châteauroux avec un mouvement rectiligne uniforme de vitesse 150 km/h, et, 1 mn avant d'arriver dans cette gare, il prend un mouvement retardé qui porte sa vitesse de la valeur 150 km/h à la valeur 100 km/h (au moment du passage à Châteauroux).
Quelle est la vitesse moyenne de T entre Vierzon et Châteauroux?

7.84 Un train T_1 part de la gare A et se dirige vers la gare E située à 15 km de A. Son mouvement se déroule suivant les phases suivantes :

1re phase : en A, sa vitesse est nulle. Il prend un mouvement uniformément accéléré qui porte sa vitesse à 60 km/h, au bout de 400 m. Il poursuit sa route avec un mouvement uniforme de vitesse 60 km/h. Il ralentit, pour s'arrêter dans une gare B, en prenant un mouvement uniformément retardé, qui porte sa vitesse de 60 km/h à la vitesse 0 km/h, en 200 m. Il reste en B pendant 3 mn.

2e phase : il repart avec le même mouvement accéléré que pendant la première phase, roule à la vitesse uniforme de 60 km/h, s'arrête en C de la même façon qu'il s'est arrêté en B. Il reste en C pendant 2 minutes.

3e phase : elle se déroule comme la seconde, avec arrêt en D, pendant 4 mn.

4e phase : T_1 repart de D avec un mouvement uniformément accéléré (le même qu'au départ de B), prend un mouvement uniforme de vitesse 60 km/h, ralentit avec un mouvement uniformément retardé (le même qu'à l'arrivée en B) et s'arrête en E.
Un train T_2 part de A et se dirige vers E. Il a d'abord un mouvement uniformément accéléré qui porte sa vitesse de la valeur 0 à la vitesse 80 km/h au bout de 500 m. Il poursuit sa route avec un mouvement uniforme, à la vitesse de 80 km/h, ralentit avec un mouvement uniformément retardé pour s'arrêter en E, après avoir freiné pendant 300 m.
Combien de temps après T_1, T_2 doit-il partir de A pour arriver en E 3 mn après T_1?

7.85 Les gares A, B, C, D se succèdent dans cet ordre sur une trajectoire rectiligne. d (A, B) = 25 km, d (B, C) = 35 km, d (C, D) = 40 km.
Un train T_1 part de A à 12 heures et se dirige vers D, avec arrêts aux gares B et C. A chaque fois que le mouvement de T_1 est uniforme, sa vitesse est de 70 km/h. A chaque fois que T_1 démarre, pour acquérir cette vitesse de 70 km/h, il lui faut parcourir 400 m, avec un mouvement uniformément accéléré. A chaque fois qu'il ralentit pour s'arrêter, il prend un mouvement uniformément retardé, sur une distance de 200 m (sa vitesse passe ainsi de la valeur 70 km/h à la valeur 0 km/h).
Le train T_1 part donc de A, accélère, prend un mouvement uniforme, ralentit, s'arrête 10 mn en B, repart vers C (accélère, prend un mouvement uniforme, ralentit), s'arrête 7 mn en C, repart vers D (accélère, prend un mouvement uniforme, ralentit), s'arrête en D.
Un second train T_2 part de D et se dirige vers A. Il prend d'abord un mouvement uniformément accéléré au cours duquel sa vitesse passe de la valeur 0 à la valeur 90 km/h. Il acquiert cette vitesse après avoir parcouru 500 m. Il continue sa route avec un mouvement uniforme de vitesse 90 km/h, sans arrêt jusqu'en A.
La voie sur laquelle se déplacent T_1 et T_2 étant unique, sauf en B et C où les trains peuvent se croiser, on demande les heures de départ possibles pour le train T_2, de telle sorte que T_1 ne soit pas obligé d'attendre T_2 (on trouvera évidemment des intervalles de temps possibles).
On illustrera le raisonnement à l'aide des diagrammes des espaces.

7.86 Un train en détresse, T, descend une rampe qui conduit à une gare G. Les freins ne fonctionnent plus. Cependant, la résistance de l'air et les frottements limitent la vitesse, qui demeure constante. Le mouvement est uniforme. Toutefois, la vitesse atteinte, 120 km/h, est excessive et dangereuse.
Au dépôt des locomotives de G, une locomotive de secours L quitte G et se porte au-devant de T sur la même voie pour atteindre T et, sans choc, ralentir sa marche. L quitte G à l'instant où, d'une station S, située à 45 km de G, on signale télégraphiquement le passage de T. Il est 8 h 30 mn.
L'opération de sauvetage se déroule selon les phases suivantes :

1re phase : L quitte G et se dirige vers T d'un mouvement uniformément accéléré, qui porte la vitesse de L de la valeur zéro à la valeur 120 km/h. Cette phase dure 3 mn. Quelle est la distance parcourue par L? Quelle est la distance parcourue par T dans le même temps?

2e phase : L ayant atteint la vitesse de 120 km/h, poursuit sa route d'un mouvement uniforme avec cette vitesse. De combien la distance TL diminue-t-elle par minute? Le mécanicien désire commencer à ralentir lorsqu'il ne sera plus qu'à 12 km de T. A quelle heure devra-t-il commencer à ralentir? Quelles seront alors les distances GL et GT?

3ᵉ phase Parvenu à 12 km de T, le mécanicien freine, annule la vitesse de L, renverse la vapeur et repart ainsi en sens inverse en accélérant. L'ensemble de cette manœuvre impose à L un mouvement uniformément varié au bout duquel L et T, animés de la même vitesse et allant dans le même sens, entrent en contact sans choc Quelle est, à l'instant du contact la distance GL GT ? Quelle heure est-il à la fin de cette troisième phase (instant du contact) ?

4ᵉ phase Immédiatement après le contact, L (réunie à T) ralentit et ramène la vitesse de T à la valeur raisonnable de 60 km/h. Le mouvement pendant cette manœuvre qui dure 4 mn est uniformément retardé Quelle est la distance GL = GT à la fin de cette quatrième phase ?

5ᵉ phase : Le mouvement de L et T est maintenant uniforme (vitesse 60 km/h) et se poursuit ainsi jusqu'à 2 km de G Quelle est l'heure à la fin de cette cinquième phase ?

6ᵉ phase . Parvenu à 2 km de G, L freine à nouveau et d'un mouvement uniformément retardé ramène la vitesse de la valeur 60 km/h à la valeur zéro. A l'instant correspondant à la fin de cette sixième phase, T et L sont en gare de G. Quelle est l'heure à cet instant ?
On construira, sur un même graphique, les diagrammes des mouvements envisagés.

Exercices sur les fonctions polynômes du 3ᵉ degré.

7.87 On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -2x^3 + 6x - 5.$$

a) Étudier f.
b) Construire sa courbe représentative C
c) Quelles sont les équations des tangentes à C aux points d'abscisses + 2 et 0 ? Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

7.88 Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 4x + 3$ pour tout x réel.
a) Étudier f
b) Construire la courbe représentative C
c) Écrire les équations des tangentes aux points d'abscisses 0, + 1, + 2. Quelles sont les coordonnées des sommets du triangle qu'elles déterminent ?

7.89 Soit les deux applications f_1 et f_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_1(x) \quad x^3 \quad x \qquad f_2(x) \quad 2x^2 \quad 1$$

a) Étudier f_1 et f_2.
b) Construire les courbes représentatives C_1 et C_2 de ces deux fonctions.
c) La droite Δ_m d'équation $x = m$ coupe C_1 et C_2 respectivement en M_1 et M_2. Quel est l'ensemble des points I milieux de $[M_1, M_2]$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

7.90 Mêmes questions qu'à l'exercice 7.89 avec les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$f_1(x) \quad \frac{1}{3}x^3 \quad x \qquad f_2(x) \quad \frac{1}{3}x^3 \quad x^2 \quad 4x$$

7.91 Mêmes questions qu'à l'exercice 7.89 avec les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$f_1(x) = -2x^3 + 6x, \qquad f_2(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3$$

7.92 *a)* Étudier la fonction f_1 définie par $f_1(x) = x^3 + 1$.
Construire sa courbe représentative C_1
b) Étudier la fonction f_2 définie par $f_2(x) = x^3 - 1$.
Construire sa courbe représentative C_2.
c) Étudier la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sup[f_1(x), f_2(x)]$.
Construire sa courbe représentative C_3.

7.93 Mêmes questions qu'à l'exercice 7.92 avec :

$$f_1 : x \longmapsto -\frac{1}{6}x^3 + 2x + 1$$

$$f_2 \quad x \qquad \frac{1}{6}x^3 \quad 2x + 1$$

$$f_3 : x \longmapsto \sup[f_1(x), f_2(x)].$$

7.94 Mêmes questions qu'à l'exercice 7.92 avec :

$$f_1 \quad x \qquad \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x$$

$$f_2 \quad x \qquad \frac{3}{2}x^3 \quad \frac{5}{3}x$$

$$f_3 : x \longmapsto \inf[f_1(x), f_2(x)]$$

7.95 Mêmes questions qu'à l'exercice 7.92 avec :

$$f_1 : x \longmapsto -x^3 - x + 4$$

$$f_2 : x \longmapsto x^3 + 2x^2 - 1$$

$$f_3 : x \longmapsto \inf[f_1(x), f_2(x)].$$

7.96 Déterminer le nombre réel p de telle sorte que la courbe représentative C de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + px + 2$ passe par le point A (− 1, 0). Étudier la fonction f obtenue et construire C

7.97 Déterminer les nombres réels a et b de telle sorte que la courbe représentative C de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + ax + b$ passe par les points : A (2, 3) et B (− 1, − 2). Étudier la fonction f obtenue et construire C.

Déterminer les nombres réels a, b, c *de telle sorte que la courbe représentative* Γ *de la fonction* f *définie par* $f(x) = ax^3 + bx + c$ *passe par les points* A, B, C *donnés.*
Étudier la fonction obtenue et construire Γ (ex. 7.98 à 7.100).

7.98 A (1, 0), B (0, 1); C (2, 5).

7.99 A $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$, B (1, 0), C $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

7.100 A (0, 4), B (1, − 1), C (− 1, 9)

7.101 Déterminer les nombres réels a, b, c de telle sorte que la courbe représentative Γ de la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx + c$ admette le point I (0, 4) comme point d'inflexion, que la tangente en ce point ait comme coefficient directeur $\alpha = -2$ et que A (3, 4) appartienne à Γ. Étudier la fonction f ainsi obtenue et construire Γ.

7.102 Mêmes questions avec :

I (0, − 3), $\alpha = +1$, A (1, 3).

Déterminer les nombres réels a, b, c, d *de telle sorte que la courbe représentative* Γ *de la fonction* f *définie par* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *passe par les points* A, B, C, D, *donnés. Étudier* f *et construire* Γ. *(ex. 7.103 à 7.105)*

7.103 A (1, 0), B (0, − 2), C (− 1, − 6), D (2, 12).

7.104 A (1, 5), B (0, 16), C (− 2, − 40), D (− 1, 3)

7.105 A (0, − 4), B $\left(1, \frac{13}{3}\right)$, C $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$, D (3, 23).

Étudier et représenter les fonctions f définies par (ex. 7.106 à 7.111).

7.106 $f(x) = |x^3 - 3x|$.

7.107 $f(x) = | \quad x^3 \quad x | \quad x$

7.108 $f(x) \quad \frac{1}{3}x^3 \quad x \quad \frac{2}{3} \quad x^2 \quad 4$

7.109 $f(x) = | x^3 \quad x, \quad x$

7.110 $f(x) = x - |x^3 - x|$

7.111 $f(x) \quad (x \quad 1)(x \quad 2)(x \quad 3)| \quad 6 \, x^2 \quad 1$

E (x) *désigne la partie entière de* x, *c'est-à-dire l'entier relatif* n *tel que* $n \leqslant x < n + 1$.
Étudier et représenter graphiquement les fonctions f *suivantes (ex. 112 à 116).*

7.112 $f(x) = [E(x)]^3$

7.113 $f(x) = [E(x)]^3 \quad 4[E(x)]^2$.

7.114 $f(x) = [x - E(x)]^2$.

7.115 $f(x) = [x - E(x)]^2 + E(x)$.

7.116 $f(x) = x^2 - [E(x)]^2$.

7.117 *a)* Étudier les variations de la fonction qui, à x réel, associe $y = f(x) = x^3 - 3x$. Construire la courbe représentative C dans un repère orthonormé, en prenant une unité égale à 3 cm.
b) Résoudre l'équation $f(x) = f(x_0)$, x_0 étant une valeur donnée. Discuter.
Par le point M_0 de C d'abscisse x_0, on mène la parallèle à l'axe des x, qui, pour certaines valeurs de x_0, recoupe C en deux points, P et Q. Déterminer l'ensemble T des milieux des segments [P, Q] lorsque x_0 varie. Construire cet ensemble. Déterminer son intersection avec C.
c) Par le point A de coordonnées $(+1, -2)$, on mène une droite D de coefficient directeur t. Pour quelles valeurs de t la droite D coupe-t-elle C en des points, R et S, distincts de A ?
Étudier l'ensemble des points E, conjugués harmoniques de A par rapport à R et S lorsque t varie.

(Tahiti. Bacc. 1967 partiel.)

7.118 Soit la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = (x - 1)(x - 3).$$

a) Étudier cette fonction et la représenter graphiquement, dans un système d'axes orthonormés $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit C la courbe obtenue.
b) Soit $M \in C$, d'abscisse x, N sa projection orthogonale sur $x'x$, P sa projection orthogonale sur $y'y$.
Calculer, en fonction de x, l'aire $a(x)$ du rectangle ONMP.
Étudier cette fonction et la représenter graphiquement.
Quel est le nombre de racines de l'équation $a(x) = k$, suivant la valeur de k, $(k \geqslant 0)$?

7.119* Soit la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) \quad x(x+2)(x+4).$$

a) Étudier la fonction f et la représenter graphiquement dans un système d'axes orthonormés $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle C la courbe obtenue.
b) Soit M un point quelconque de C, d'abscisse x, N sa projection orthogonale sur $x'x$, P sa projection orthogonale sur $y'y$.

Calculer, en fonction de x, le demi-périmètre $p(x)$ du rectangle ONMP. Étudier sa variation quand x décrit $\mathbb{R}$. La représenter graphiquement.
c) Discuter, suivant les valeurs de k, $(k \geqslant 0)$, le nombre de racines de l'équation $p(x) = k$.

7.120* Même problème que l'ex. 7.119 avec f définie par $f(x) = x^3 + 1$.

7.121 Soit la fonction f_m de la variable réelle x, définie par : $f_m(x) = x^3 - mx + m - 2$ où m est un paramètre réel.
a) Démontrer que les courbes représentatives C_m de ces fonctions passent par un point fixe lorsque m varie.
b) Étudier, suivant les valeurs de m, le sens de variation de f_m.
c) Écrire l'équation de la tangente au point d'inflexion de C_m. Démontrer que cette tangente passe par un point fixe lorsque m varie.
d) Construire C_m pour $m \in \{-1, 0, 3\}$, sur une même figure. Vérifier la propriété démontrée en *c)*.

7.122 Soit la fonction f_m de la variable réelle x, définie par $f_m(x) = mx^3 + (2m - 1)x + 2$, où m représente un paramètre réel.
On désigne par C_m la courbe représentative de f_m.
a) Démontrer que toutes les courbes C_m passent par un point fixe, et que ce point fixe est point d'inflexion pour chaque courbe et centre de symétrie pour la figure.
b) Écrire l'équation de la tangente à C_m au point d'abscisse $+1$. Démontrer que cette droite passe par un point fixe lorsque m varie.
Que peut-on dire des tangentes aux courbes C_m aux points d'abscisse -1 ?

7.123* Soit la fonction f_m définie pour toute valeur réelle de x par :
$f_m(x) = (2m + 1)x^3 - mx - m + 1$, où m désigne un paramètre réel. On appelle C_m la courbe représentative de cette fonction dans un plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Étudier le sens de variation de f_m suivant les valeurs de m.
b) Démontrer que, que que soit m, C_m passe par un point fixe A que l'on déterminera.
c) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion I_m de C_m. Écrire l'équation de la tangente en I_m à C_m. Démontrer que cette droite passe par un point fixe lorsque m varie.
d) Pour une valeur x_0 de l'abscisse, les tangentes aux courbes C_m sont parallèles entre elles lorsque m varie. Déterminer les valeurs possibles de x_0.
e) Deux courbes C_m distinctes ont-elles des points communs autres que A ?
f) Construire, sur une même figure, les courbes C_m correspondant à

$$m \in \left\{ \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, 0, 1 \right\}$$

7.124 Soit la fonction f_m de la variable réelle x définie par :
$f_m(x) = (m - 1)x^2 - m + 2$, où m est un paramètre réel.
Cette fonction f_m admet une courbe représentative C_m. On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des courbes C_m.
a) Démontrer que C_m passe par un point fixe lorsque m varie.
b) Quel est le sens de variation de f_m suivant les valeurs de m ?
c) Démontrer que la droite d'équation $y = 1$ est un axe de symétrie pour $\mathcal{F}$.
d) Déterminer m pour que C_m passe par A (2, 0).
e) Déterminer m pour que C_m passe par $M_0(x_0, y_0)$. Discuter.

7.125* Soit la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) \quad 4x^3 \quad 3x \quad 1$$

a) Étudier f et tracer sa courbe représentative C.
b) Vérifier que le point A (1, 2) appartient à C.
On considère une droite D_m de coefficient directeur m, qui passe par A. Quelle est l'équation de D_m ?

A quelle condition $D_m \cap C$ comprend des points autres que A? De cette discussion, déduire les équations des tangentes à C passant par A.
c) M′ et M″ représentent les points communs à D_m et C autres que A, lorsqu'ils existent. Quel est l'ensemble E des points I, milieux des segments [M′, M″], lorsque m varie en prenant toutes les valeurs possibles
d) M′ et M″ étant toujours supposés existants, on désigne par P le conjugué harmonique de A par rapport à M′ et M″. Quelles sont, en fonction de m les coordonnées de P? Quel est l'ensemble F des points P lorsque m prend toutes les valeurs possibles?
N. B. On indiquera certains points remarquables de E et F.

7.126** Soit f la fonction définie pour tout x réel par $f_m(x) = x^3 + mx^2$, où m désigne un paramètre réel
Étudier cette famille de fonctions lorsque m varie, ainsi que leurs courbes représentatives.

7.127 Soit la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$.
a) Étudier f et construire sa courbe représentative C.
b) Soit D_m une droite passant par O, de coefficient directeur m. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de D_m et de C.
c) Lorsqu'il existe deux points d'intersection de C et D_m autres que O, on les désigne par P′ et P″.
Quel est l'ensemble des milieux I des segments [P′, P″] lorsque m varie en prenant toutes les valeurs possibles
d) Toujours dans le cas où P′ et P″ existent, on désigne par M le conjugué harmonique de O par rapport à P′ et P″. Quel est l'ensemble des points M lorsque m varie en prenant toutes les valeurs possibles?

Discuter graphiquement le nombre des solutions des équations suivantes (m étant un paramètre réel) (ex. 128, 129).

7.128 $4x^3 + 3x \quad m \quad 0.$

7.129 $\frac{1}{3}x^3 + x^2 \quad 3x \quad 1 \quad m \quad 0$

Déterminer à 10^{-2} près par défaut la, ou les racines, des équations suivantes (ex. 130 à 134).

7.130 $x^3 + 2x + 4 \quad 0$

7.131 $2x^3 \quad 4x + 1 \quad 0$

7.132 $3x^3 - x - 1 = 0.$

7.133 $x^3 + 4x - 2 = 0.$

7.134 $x^3 \quad 3x + 1 \quad 0.$

Déterminer les sous-ensembles de points d'un plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tels que leurs coordonnées vérifient les systèmes ou inéquations suivants (ex. 135 à 144).

7.135 $\begin{cases} x^3 > 0, \\ x^2 + y \quad 1 \quad 0 \end{cases}$

7.136 $\begin{cases} y - x^3 > 0, \\ x^2 + y \quad 1 > 0 \end{cases}$

7.137 $\begin{cases} y \quad 4x^3 + 3x + 2 \leqslant 0, \\ 2x^2 - y - 3 > 0. \end{cases}$

7.138 $\begin{cases} y + x^3 - 3x + 4 > 0, \\ y + x - 1 = 0. \end{cases}$

7.139 $\begin{cases} y \quad \frac{1}{3}x^3 + x \quad 1 < 0, \\ y - x^3 < 0, \\ y + x^2 - 4x > 0. \end{cases}$

7.140 $(y - x^3 + 2x)(y + x - 1) > 0.$

7.141 $(x^3 + 4 - y)(x^2 + y) \leqslant 0.$

7.142 $(y - x^3 - x)(x^2 - 1) > 0.$

7.143 $(2x^2 - 6x + y)(x^2 - 3x - 4) \geqslant 0.$

7.144 $(x^2 - x + 3y)(x^2 - 3x + y) < 0.$

7.145* Soit l'équation du second degré
$$t^2 + 2(x - 1)t + y - \frac{4}{3}x^2 = 0 \qquad E_{(x,y)}$$
où t désigne l'inconnue réelle et où x, y sont deux paramètres réels
A chaque équation $E_{(x,y)}$, on associe un point M (x, y) d'un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Discuter, suivant la position du point M dans P, l'existence et le signe des racines de $E_{(x,y)}$.
b) Pour quelles positions du point M dans P a-t-on
$$t' < 0 < 1 < t'', \text{ où } t' \text{ et } t'' \text{ représentent les racines de } E_{(x,y)}?$$
c) Pour quelles positions du point M dans P a-t-on
$$0 < t' < 1 < t'' ?$$

7.146 On considère les fonctions f_m définies par
$$f_m(x) = (m + 1)x^3 - 2mx^2 - (m - 2)x + 2m - 3$$
où m désigne un paramètre réel.
a) Démontrer que les courbes représentatives C_m de f_m passent par des points fixes lorsque m varie.
b) Pour quelles valeurs de m la fonction f_m est-elle croissante dans ℝ ?
c) Étudier et construire f_m pour $m \in \{-2, -1, 0, 2\}$.
d) On coupe C_{-2}, C_0 et C_2 par une droite D d'équation $x = x_0$. On obtient respectivement les points A, B, C. Soit M un point quelconque de D. Calculer $\overline{MA} - 2\,\overline{MB} + \overline{MC}$.
Quelle conséquence géométrique peut-on en tirer pour les courbes C_{-2}, C_0, C_2?

Exercices sur les fonctions polynômes de degré $n \geqslant 4$.

Étudier et représenter graphiquement les fonctions f suivantes (ex. 147 à 152).

7.147 $f(x) = x^4.$

7.148 $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2.$

7.149 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1.$

7.150 $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3.$

7.151 $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 1.$

7.152 $f(x) = -x^4 - 3x^2 + 10.$

7.153 Étudier la fonction f définie par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1.$
Construire sa courbe représentative C. Précisez ses points d'inflexion. Écrire les équations de ses tangentes en ces points. Écrire les équations des tangentes aux points d'abscisses $\frac{1}{2}$, 1 et − 1 et déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces droites prises deux à deux.

7.154 Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 \quad \frac{5}{2}x^2 \quad 1$
Construire sa courbe représentative C.
Utiliser cette courbe pour discuter graphiquement le nombre de racines réelles de l'équation
$$x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 2 - m = 0.$$

7.155 Étudier la fonction f définie par $f(x) \quad x^4 \quad 2x^3 \quad 2x^2 + 3$
Construire sa courbe représentative C.
Utiliser cette courbe pour discuter graphiquement le nombre de racines réelles de l'équation
$$x^4 \quad 2x^3 \quad 2x^2 + m \quad 0$$

7.156* Étudier la fonction f définie par $f(x) \quad \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \quad 4x^2 + 8x + 1$.

Construire sa courbe représentative C.

Utiliser cette courbe pour discuter graphiquement le nombre de racines réelles de l'équation :

$\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 8x + 1 - m = 0$ et leur position par rapport aux nombres -1 et $\frac{3}{2}$.

7.157** Étudier la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 6x$.

Construire sa courbe représentative C.

Utiliser cette courbe pour discuter graphiquement le nombre de racines réelles de l'équation :

$-x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 12x - m + 3 = 0$ et leur position par rapport aux nombres 0, 1 et 2

7.158 On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3 + 3x$

a) Étudier f et construire la courbe représentative C dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Soit M un point quelconque de C. Étudier la variation de la fonction g définie par $g(x) = OM^2$, lorsque x décrit $\mathbb{R}$.

En déduire les coordonnées des points d'intersection du cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$ avec C. On fera une figure précise où l'on représentera C et ce cercle

7.159* Soit l'équation du second degré où t représente l'inconnue réelle

$$t \quad 2 \quad 1)t \quad \quad 0 \qquad E_{(x,y)}$$

où x et y sont deux paramètres réels.

A chaque équation $E_{(x,y)}$, on associe un point M (x, y) d'un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On choisira $\|\vec{i}\| \quad \|\vec{j}\| = 2$ cm.

a) Quel est l'ensemble des points M de P pour lesquels l'équation admet des racines réelles ? On appellera C la courbe intervenant dans cette question.

b) Quel est le signe de ces racines, lorsqu'elles existent, suivant la position du point M dans le plan P ?

c) Quel est l'ensemble des points M pour lesquels t_0, valeur réelle donnée, est racine de l'équation $E_{(x,y)}$? On appellera Γ_{t_0} cet ensemble.

Étudier la position relative de C et de ces courbes Γ_{t_0} lorsque t_0 prend toutes les valeurs réelles possibles

Représenter sur une même figure la courbe C et les courbes Γ_{t_0} pour

$$t_0 \in \left\{ -2, -1, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2}, 0, 1 \right\}$$

7.160 Soit l'équation du second degré

$$t^2 \quad 2(x^2 \quad x \quad 1)t \quad \quad x^2 \quad 2x \quad 0 \qquad E_{(x,y)}$$

où t représente l'inconnue réelle et où x et y sont deux paramètres réels. A chaque équation $E_{(x,y)}$, on associe un point M (x, y) d'un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Discuter, suivant la position du point M dans le plan P, l'existence des racines de l'équation $E_{(x,y)}$. On appellera Γ la courbe intervenant dans cette discussion.

b) Quel est l'ensemble C_{t_0} des points M de P pour lesquels t_0, valeur réelle donnée, est racine de l'équation $E_{(x,y)}$?

Démontrer que le premier membre de l'équation aux abscisses des points d'intersection de Γ et C_{t_0} peut se mettre sous la forme du carré d'un trinôme du second degré. En déduire, suivant les valeurs de t_0, la position relative de Γ et C_{t_0}.

Representer les courbes C_{t_0} pour

$$t_0 \in \left\{ \quad 2 \quad \frac{5}{4}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

7.161* On considère les fonctions f_m définies par

$$f_m(x) \quad (m+1)x^4 - 2mx^2 - 1$$

où m désigne un paramètre réel.

a) Démontrer que les courbes représentatives C_m des fonctions f_m passent par des points fixes lorsque m varie.

b) Étudier le sens de variation de f_m lorsque m prend toutes les valeurs réelles possibles. On trouvera trois types principaux de fonctions que l'on désignera par A, B, C.

c) Quel est le nombre de courbes C_m passant par un point donné $M_0(x_0, y_0)$ du plan ? Discuter. On précisera quel est le type de fonction représentée par la courbe correspondant à M_0, suivant la position de M dans le plan.

On illustrera cette discussion en construisant plusieurs courbes de la famille $\{C_m\}$ envisagée

7.162* Soit les fonctions f_m définies par

$$f_m(x) = (-2m+1)x^4 - 2x^3 + (m-1)x^2.$$

a) Démontrer que les courbes représentatives C_m correspondantes passent par des points fixes lorsque m varie

b) Les fonctions f_m peuvent-elles admettre un seul extremum ?

c) Déterminer la valeur de m pour que la fonction f_m correspondante admette un minimum pour $x \quad 1$.

Étudier la fonction ainsi déterminée et construire sa courbe représentative.

d) Étudier la fonction correspondant à $m = \frac{5}{8}$ et construire sa courbe représentative sur la même figure que précédemment.

Étudier les fonctions f suivantes et construire leurs courbes representatives (ex. 163 à 170).

7.163 $f(x) = \left|\frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right.$.

7.164 $f(x) = \quad \frac{1}{4}x^4 \quad \frac{x^3}{3} \quad x^2 \quad 2$

7.165 $f(x) \quad \frac{1}{4}x^4 \quad \left|\frac{x^3}{3} \quad x^2\right| \quad 2$

7.166 $f(x) \quad \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \quad \left|\frac{1}{2}x^2 \quad x\right.$

7.167 $f(x) = \text{Inf}\left(x^4 \quad x^3 \quad \frac{1}{2}x^2, \quad x^3\right)$

7.168 $f(x) = \text{Sup}\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2 - 2, x^2 - 3\right)$.

7.169 $f(x) = \text{Sup}(\quad x^4 + 2x^2 + 3, x + 3)$.

7.170 $f(x) \quad \text{Inf}(x^4 + 6x^2, 4x^2 + 4x - 1)$.

Discuter graphiquement les systèmes ou inéquations suivants (ex. 171 à 174).

7.171 $\begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2 + y < 0 \\ \quad x^2 \quad x \quad \quad 0 \end{cases}$

7.172 $\begin{cases} x^4 \quad x^3 \quad 2x^2 \quad 3x \quad 4y \quad 0 \\ \frac{1}{2}x^3 \quad \frac{3}{2}x - 2y < 0. \end{cases}$

7.173 $(2x^{3} - 3x - 8y)\left(\frac{1}{2}x^{4} - \frac{1}{2}x^{3} - x^{2} + \frac{3}{2}x + 2y\right) < 0$

7.174 $(x^{4} \quad 2x^{2} \quad 1 \quad y)\left(y \quad \frac{1}{2}x^{2} + \frac{5}{2}\right) \geqslant 0.$

Étudier les fonctions suivantes et construire leurs courbes représentatives (ex. 175 à 177).

7.175 $f(x) \quad \frac{1}{3}x^{5} \quad \frac{1}{5}x^{3}$

7.176 $f(x) \quad \frac{1}{6}x^{3} + x^{2} \quad x - 2$

7.177 $f(x) \quad -\frac{3}{5}x^{5} + 5x^{3} \quad 12x \quad 1$

7.178 On considère la fonction f telle que pour tout x réel on ait $f(x) = x^{5} + 5x^{4}$.
a) Étudier les variations de f.
b) Tracer la représentation graphique Γ de f.
1. Pour x variant de -1 à $+1$, dans un repère orthonormé (le centimètre représente le segment unité).
2. Pour x variant de -5 à $+2$, dans un repère orthogonal (sur l'axe Ox, le centimètre représente le segment unité; sur l'axe Oy, le centimètre représente 16 unités).
c) Une droite L, de coefficient directeur m, passe par le point Ω d'abscisse -5, sur l'axe Ox. Démontrer que, si m est positif, L coupe Γ en deux points, M et M', variables avec m, comment ces points sont-ils placés par rapport à Ω? Quel est leur milieu?
d) Trouver l'équation de la tangente Δ à Γ au point d'abscisse -3; dessiner cette tangente sur le graphique 2.
Soit M et P deux points de même abscisse x sur Γ et sur Δ; évaluer $\overline{PM} = \varphi(x)$.
Démontrer que $\varphi(x)$ est un polynôme en x qui contient en facteur $(x + 3)^{2}$; en déduire une factorisation de $\varphi(x)$.
Démontrer que, si $|x + 3| < \frac{2}{10}$, les deux points M et P sont indiscernables sur le graphique 2.
(On admet que deux points sont indiscernables si leur distance est inférieure à 0,2 mm.)
(D'après bacc. B. Groupe I. 1968.)





Exemples de fonctions rationnelles

Ce chapitre donne des exemples d'étude de **fonctions rationnelles** *et de construction de leurs* **courbes représentatives.** *Dans le cours nous nous sommes limités à la fonction homographique (section I) et aux fonctions du type* $x \longmapsto \frac{ax^{2} + bx + c}{a'x^{2} + b'x + c'}$ *(avec $a' \neq 0$ dans la section II et $a' = 0$ dans la section III).*
Ces constructions de courbes sont l'occasion de traiter des exercices concernant soit la discussion d'équations, soit la résolution graphique de systèmes où l'inconnue est le couple des coordonnées d'un point du plan.

Rappelons que, u et v étant deux **fonctions polynômes**, on appelle **fonction rationnelle** toute fonction f définie pour tout x tel que $v(x) \neq 0$ par

$$f(x) \quad \frac{u(x)}{v(x)}$$

Nous avons vu, respectivement aux § 4. 11 et § 5 5, qu'une fonction rationnelle était continue et dérivable sur tout intervalle ou elle est définie

I. Fonction homographique

On appelle ainsi toute fonction

$$x \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

où $c \neq 0$. (Pour $c = 0$, $d \neq 0$ on aurait une fonction affine); cette fonction est définie sur D $\quad \left\{ \frac{d}{c} \right\}$

8. 1 EXEMPLE 1. $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$.

a) Domaine de définition et de continuité.

Le nombre $f(x)$ peut être calculé pour toute valeur de x n'annulant pas son dénominateur. Donc $D = \mathbb{R}^{*}$.
Une fonction fraction rationnelle est continue pour toute valeur de x n'annulant pas son dénominateur Donc f est continue sur $\mathbb{R}^{*}$; f est une fonction impaire. Il suffit de l'étudier dans $D_{1} = \mathbb{R}_{+}^{*}$.

b) Recherche des limites.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = +0$$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$$

c) Sens de variation de f.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f'(x) < 0.$

La fonction f est donc strictement décroissante dans chacun des deux intervalles où elle est définie, $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

d) Tableau de variation.

x	0	∞
$f'(x)$	−	
$f(x)$	∞ ↘	0

e) Courbe représentative C.

La fonction f étant une fonction impaire, quel que soit le repère utilisé, C admet O (0, 0) comme centre de symétrie (fig. 1).

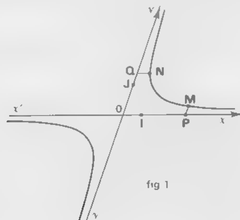


fig 1

Pour préciser la forme de la courbe, déterminons les coordonnées de quelques points de C.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$f(x)$	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Asymptotes

Lorsque x tend vers $+\infty$ $f(x)$ tend vers 0. Le point M qui décrit C se « rapproche » donc de l'axe $x'x$ lorsque x augmente indéfiniment. Nous précisons cette notion. Soit x l'abscisse de M, son ordonnée est $f(x) = \frac{1}{x}$. Soit P le point de même abscisse de l'axe $x'x$, son ordonnée est donc nulle; $\overline{PM} = \frac{1}{x}$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} \overline{PM} = 0$$

Par définition, la droite $x'x$ est *asymptote* à la courbe C.

De la même façon, si x tend vers zéro par valeurs positives, $f(x)$ tend vers $+\infty$. Soit N le point de C d'ordonnée $y = f(x)$; son abscisse est $\frac{1}{y} = \frac{1}{f(x)} = x$. Soit Q le point de $y'y$ d'ordonnée y; son abscisse est nulle; $\overline{QN} = \frac{1}{y} = \frac{1}{f(x)}$, donc $\lim_{y \to +\infty} \overline{QN} = 0$.

Le point N se « rapproche » de $y'y$ lorsque y augmente indéfiniment, notion qui est précisée par le fait que $\lim_{y \to +\infty} \overline{QN} = 0$. *Par définition*, la droite $y'y$ est *asymptote* à la courbe C.

La courbe C *admet donc pour asymptotes les deux axes de coordonnées* $x'x$, $y'y$ (fig. 1).

Axes de symétrie de C.

Quels que soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$, vecteurs de base, dans un plan euclidien, il existe un nombre réel positif k tel que $\|\vec{j}\| = k\|\vec{i}\|$.

Effectuons un changement de base tel que la nouvelle base soit normée. Choisissons $\left(\vec{i}, \vec{j}_1 = \frac{1}{k}\vec{j}\right)$ comme nouvelle base.

Un point M quelconque du plan vérifie

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$= X\vec{i} + Y\vec{j}_1 = X\vec{i} + \left(\frac{1}{k}Y\right)\vec{j}.$$

La décomposition d'un vecteur dans une base étant unique, il s'ensuit que

$$\begin{cases} x = X \\ y = \dfrac{Y}{k} \end{cases}$$

Le point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ appartient à C si et seulement si $xy = 1$, donc le même point M de coordonnées (X, Y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j_1})$ appartient à C si et seulement si $X\frac{Y}{k} = 1$, c'est-à-dire

$$XY = k.$$

1. Le symétrique M′ du point M (X, Y) par rapport à la première bissectrice Δ des axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j_1})$ a pour coordonnées (Y, X). Précisons : pour tout point M de C le point $M\left(X, \frac{k}{X}\right)$ a pour symétrique M′ (X′, Y′) où

$$X' = Y = \frac{k}{X} \qquad Y' = X$$

Les coordonnées de M′ vérifient $Y' = \frac{k}{X'}$; par suite M′ ∈ C.

On a donc le schéma suivant en désignant par s_Δ la symétrie d'axe Δ : pour tout point M de C

$$M \xmapsto{s_\Delta} M' \quad \text{avec } M' \in C,$$

donc

$$C \xrightarrow{s_\Delta} C$$

et Δ est axe de symétrie de C (fig. 2).

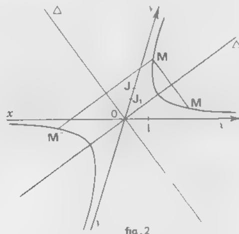


fig. 2

2. Le symétrique M″ du point M (X, Y) dans la symétrie $s_{\Delta'}$, d'axe Δ′, seconde bissectrice des axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j_1})$, a pour coordonnées (− Y, − X) ; pour tout point M de C, le point $M\left(X, \frac{k}{X}\right)$ a pour symétrique M″ (X″, Y″) où

$$X'' = -Y = -\frac{k}{X} \qquad Y'' = -X.$$

Les coordonnées de M″ vérifient $Y'' = \frac{k}{X''}$; par suite M″ ∈ C. On a donc le schéma suivant

$$M \xmapsto{s_{\Delta'}} M'' \quad \text{avec } M'' \in C,$$

donc

$$C \xrightarrow{s_{\Delta'}} C$$

et Δ′ est axe de symétrie de C (fig. 2).

La courbe C admet donc pour axes de symétries deux axes de symétrie perpendiculaires qui sont les bissectrices des droites qui portent les axes de coordonnées et ceci quel que soit le repère choisi.

EXERCICE

Désignant par s_0 et id_P la symétrie par rapport à O et l'identité du plan P rappeler que l'ensemble $G = \{id_P, s_\Delta, s_{\Delta'}, s_0\}$ est, pour la composition des bijections, un groupe commutatif. Conclure : C est invariante par toute bijection de G

8. 2 NOTION GÉNÉRALE D'ASYMPTOTE PARALLÈLE A L'UN DES AXES DE COORDONNÉES

a) Asymptote parallèle à l'axe $x'x$

Supposons que, pour une fonction f donnée, nous ayons :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a,$$

a étant un nombre réel. (L'étude qui suit serait la même pour $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$.)

Soit M un point quelconque de la courbe C représentant la fonction f, de coordonnées $(x, f(x))$.

Soit L une droite passant par M, parallèle à une droite fixe L_0 (fig. 3). Supposons L_0 *non parallèle à $x'x$* ; L coupe la droite $y = a$ en un point R. Désignons par $\vec{k}$ un vecteur directeur de L_0, donc de L.

Soit P le point de la droite $y = a$ ayant même abscisse que M ; on a

$$\overrightarrow{PM} = \overline{PM}\,\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{RM} = \overline{RM}\,\vec{k}.$$

Quel que soit le point M de C, $\frac{\overline{RM}}{\overline{PM}}$ est constant (propriété des projections). Posons $\frac{\overline{RM}}{\overline{PM}} = \lambda$, soit $\overline{RM} = \lambda \overline{PM}$. On a pour tout point M de C

$$\overline{PM} = f(x) - a, \qquad \overline{RM} = \lambda\,[f(x) - a] ;$$

on en déduit

$$\lim_{x \to +\infty} \overline{RM} = \lambda \lim_{x \to +\infty} \overline{PM} = 0.$$

Ce résultat est indépendant de λ donc de $\vec{k}$, donc de la direction de L_0, non parallèle à $x'x$; il ne dépend que de la fonction f. Nous énoncerons la définition suivante

Définition.

Lorsque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$, on dit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe représentative C de la fonction f

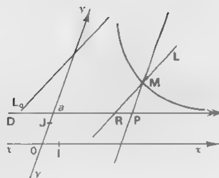


fig. 3

Cela signifie que L étant une droite se déplaçant parallèlement à elle-même, coupant C en M et la droite D en R, $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{RM} = 0$. Pratiquement, cela se traduit par le fait que le point M de C se « rapproche » de D lorsque son abscisse tend vers l'infini; en particulier si le plan de C est euclidien cela signifie que la distance de M à D tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$; il suffit de prendre L_0 perpendiculaire à $x'x$.

b) Asymptote parallèle à l'axe $y'y$

Supposons qu'une fonction donnée f vérifie

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty$$

a étant un nombre réel. (L'étude serait la même si on avait

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty).$$

Nous allons faire un raisonnement analogue à celui du cas a), en choisissant cette fois une droite L_0 *non parallèle à $y'y$* (fig. 4).

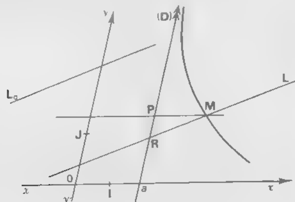


fig 4

Soit M un point quelconque de C. La droite L parallèle à L_0 passant par M coupe la droite d'équation $x = a$ au point R. La parallèle à $x'x$ passant par M coupe la droite $x = a$ au point P. On a $\overline{\mathrm{PM}} = \overline{\mathrm{PM}}\,\vec{i}$ et $\overrightarrow{\mathrm{RM}} = \overline{\mathrm{RM}}\,\vec{k}$ ($\vec{k}$ vecteur directeur de L_0).

Quel que soit le point M de C, $\dfrac{\overline{\mathrm{RM}}}{\overline{\mathrm{PM}}}$ est constant (propriété des projections). Posons $\dfrac{\overline{\mathrm{RM}}}{\overline{\mathrm{PM}}} = \lambda$, soit $\overline{\mathrm{RM}} = \lambda \overline{\mathrm{PM}}$. On a donc $\overline{\mathrm{PM}} = x - a$, $\quad \overline{\mathrm{RM}} = \lambda (x - a)$.

Par conséquent nous avons simultanément

$$\lim_{x \to a+0} \overline{\mathrm{PM}} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x \to a+0} \overline{\mathrm{RM}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty.$$

Ce qui prouve que lorsque x tend vers a à droite, l'ordonnée y de M tend vers $+\infty$ et $\overline{\mathrm{RM}}$ vers zéro; et ceci quelle que soit la droite L_0, non parallèle à $y'y$, choisie; ce résultat ne dépend donc que de la fonction f. Nous énoncerons la définition suivante

Définition.

Lorsque $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$ on dit que la droite $x = a$ est **asymptote** à la courbe représentative C de la fonction f.

8. 3 EXEMPLE 2. $f : x \longmapsto \dfrac{2}{3(x-2)}$.

a) Domaine de définition et de continuité.

$$\mathrm{D} = \mathbb{R} - \{2\}.$$

b) Recherche des limites.

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{2}{3(x-2)} = 0$$

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} \frac{2}{3(x-2)} = +\infty \left(\text{car pour tout } x > 2 \text{ on a } \frac{2}{3(x-2)} > 0\right)$$

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} \frac{2}{3(x-2)} = -\infty \left(\text{car pour tout } x < 2 \text{ on a } \frac{2}{3(x-2)} < 0\right)$$

c) Sens de variation.

$$f'(x) = -\frac{2}{3(x-2)^2}$$

$$(\forall x \in \mathrm{D}) \qquad f'(x) < 0.$$

La fonction f est donc strictement décroissante dans chacun des deux intervalles où elle est définie, $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$.

d) Tableau de variation.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$			‖		
$f(x)$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

e) Courbe représentative C.

On a $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est donc asymptote de C (fig. 5).

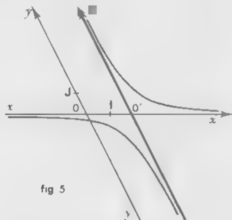


fig 5

De même $\lim_{x \to 2} |f(x)| = +\infty$: la droite d'équation $x = 2$ est donc une asymptote de C.
Calculons les coordonnées de quelques points de C.

x	1	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{2}$	3	4	5	
$f(x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	2	$+2$	$+\frac{4}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$

EXERCICE

Démontrer que le point d'intersection O′ des asymptotes de C est centre de symétrie de C. (Le plan étant rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ prendre pour nouveau repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$).

8. 4 RÉSULTATS GÉNÉRAUX CONCERNANT LA FONCTION HOMOGRAPHIQUE

Soit $f : x \longrightarrow \frac{ax + b}{cx + d}$ où c est **non nul.**

a) Domaine de définition et de continuité.

Le dénominateur s'annule uniquement pour $x = -\frac{d}{c}$.

Donc, la fonction f est définie et continue pour toute valeur réelle de x différente de $-\frac{d}{c}$.

$$D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} = \left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$$

b) Recherche des limites.

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$$

$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}} |f(x)| = +\infty.$$

Le signe de $\lim_{x \to -\frac{d}{c}} f(x)$ dépend des valeurs numériques des coefficients a, b, c, d et du fait que x peut tendre vers $-\frac{d}{c}$ par valeurs supérieures ou inférieures à cette valeur, ce qui est à préciser dans chaque cas particulier.

c) Sens de variation. Pour tout x de D on a :

$$f'(x) = \frac{a(cx + d) - c(ax + b)}{(cx + d)^2} = \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

ce qui peut se noter

$$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx + d)^2}$$

Trois cas peuvent se présenter :

1. $\boldsymbol{ad - bc > 0}$. La fonction f est *strictement croissante* dans les intervalles où elle est définie. Son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{a}{c}$

2. $ad - bc < 0$. La fonction f est *strictement décroissante* dans les intervalles où elle est définie. Son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{a}{c} \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow \frac{a}{c}$	

3. $ad - bc = 0$. La fonction f est constante sur chacun des intervalles où elle est dérivable, c'est-à-dire sur $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$; en fait nous allons voir que f est constante sur $D = \left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[= \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. (D'après le théorème 1 du § 6.2 on peut seulement affirmer qu'il existe k_1 et k_2 tels que $f(x) = k_1$ sur $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$ et $f(x) = k_2$ sur $\left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$).

En effet, on a dans le cas étudié $ad - bc = 0$, or $c \neq 0$, donc $b = \frac{ad}{c}$; d'où pour tout x de $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

$$f(x) = \frac{ax + \frac{ad}{c}}{cx + d} = \frac{a}{c}\,\frac{cx + d}{cx + d} = \frac{a}{c}$$

Ce résultat devient évident à la suite de l'étude suivante.

d) Forme canonique de $\frac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0)$

Pour tout $x \in D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ on a

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{ax + b}{cx + d} - \frac{a}{c}\right) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)}$$

$$= \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad - bc}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$$

Le dernier membre de ces égalités est appelé forme canonique de $\frac{ax + b}{cx + d}$ où $c \neq 0$.

Cette forme canonique est particulièrement commode à utiliser pour déterminer la limite ($+\infty$ ou bien $-\infty$) de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\frac{d}{c}$ (à droite ou bien à gauche); de même en utilisant cette forme canonique le calcul de $f'(x)$ est simplifié.

Sur cette forme il devient évident que pour $ad - bc = 0$ f est constant sur D tout entier et que sa valeur constante est $\frac{a}{c}$.

e) Courbe représentative C (cas où $ad - bc \neq 0$).

On a $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \frac{a}{c}$: il s'ensuit que la droite d'équation $y = \frac{a}{c}$ est asymptote à la courbe représentative C.

De même $\lim_{x \to -\frac{d}{c}} |f(x)| = +\infty$: donc la droite d'équation $x = -\frac{d}{c}$ est asymptote à la courbe représentative C.

Démontrons que les propriétés de symétrie rencontrées dans quelques exemples sont générales.

Soit $O'\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ le point d'intersection des asymptotes.

Effectuons un changement d'origine du repère; prenons comme nouvelle origine le point O'.

Si (x, y) sont les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) les coordonnées du même point dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ on démontrera facilement que ces coordonnées sont liées par

$$\begin{cases} x = X - \frac{d}{c} \\ y = Y + \frac{a}{c} \end{cases}$$

Le point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ appartient à (C) si et seulement si

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

donc le même point M de coordonnées (X, Y) dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ appartient à C si et seulement si

$$Y + \frac{a}{c} = \frac{a\left(X - \frac{d}{c}\right) + b}{c\left(X - \frac{d}{c}\right) + d}$$

ou encore

$$Y = -\frac{ad - bc}{c^2 X}.$$

REMARQUE

Cette équation apparait immédiatement sur la forme canonique car

$$X = x + \frac{d}{c} \quad \text{et} \quad Y = y - \frac{a}{c}.$$

La courbe C est donc la courbe représentative dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction F définie par $F(X) = -\frac{ad - bc}{c^2 X}$. Cette fonction F est une fonction impaire. Sa courbe représentative C est donc symétrique par rapport à O.

Démontrons d'autre part que les bissectrices des asymptotes sont axes de symétrie pour la courbe C. Procédons comme à l'exemple 1 (cf. § 8. 1). Il existe $\lambda > 0$ tel que $\|\vec{j}\| = \lambda \|\vec{i}\|$; choisissons pour vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}_1 = \frac{1}{\lambda}\vec{j}$, on a $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}_1\|$. Le point M de coordonnées (X, Y) dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$ a pour coordonnées (X_1, Y_1) dans $(O', \vec{i}, \vec{j}_1)$. On a :

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}_1 = X_1\vec{i} + \frac{Y_1}{\lambda}\vec{j}$$

d'où $X = X_1$, $Y = \frac{1}{\lambda} Y_1$. Le point M (X_1, Y_1) appartient à C si seulement si

$$Y_1 = \frac{-\lambda(ad - bc)}{c^2 X_1}$$

Toutes les courbes C représentatives des fonctions f

$$x \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (c \neq 0 \quad \text{et} \quad ad - bc \neq 0)$$

ont donc, par rapport au repère $(O', \vec{i}, \vec{j}_1)$ où $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}_1\|$, une équation de la forme

$$Y_1 = \frac{k}{X_1} \qquad (k \neq 0).$$

Comme au § 8. 1 e on montrera que les bissectrices des axes $O'X_1$ et $O'Y_1$, qui sont les asymptotes de C sont axes de symétrie de C.

Ces courbes sont appelées **hyperboles**; lorsque les asymptotes sont perpendiculaires ces courbes prennent le nom d'**hyperboles équilatères.**

8. 5 RÉSOLUTION D'UNE INÉQUATION

Résoudre l'inéquation

(1) $$xy + 2x - 4y + 5 < 0$$

où (x, y) élément de $\mathbb{R}^2$ est l'inconnue.

a) L'inéquation peut s'écrire $(x - 4)y + 2x + 5 < 0$; or pour $x = 4$ elle devient $8 + 5 < 0$, il n'y a donc pas de solutions de la forme $(4, y)$. Par conséquent l'ensemble des solutions de (1) est l'ensemble des solutions de

$$(x - 4)\left(y + \frac{2x + 5}{x - 4}\right) < 0$$

ou encore de

(2) $$(x - 4)(y - f(x)) < 0$$

en désignant par f la fonction homographique

$$f: \; x \longmapsto -\frac{2x + 5}{x - 4}.$$

Nous allons déterminer l'ensemble des points M (x, y) du plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont les coordonnées vérifient (2). Pour cela nous allons chercher le signe de $x - 4$ et celui de $y - f(x)$ suivant la position de M dans le plan. Pour cette deuxième étude construisons la courbe C représentative de f.

b) Courbe représentative C de $x \longmapsto -\frac{2x + 5}{x - 4}$.

Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} -\frac{2x}{x} = -2$$

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{-2x - 5}{x - 4} = +\infty \qquad (\text{car } x - 4 < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 4} (-2x - 5) = -13)$$

$$\lim_{x \to 4+0} \frac{-2x - 5}{x - 4} = -\infty \qquad (\text{car } x - 4 > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 4} (-2x - 5) = -13)$$

$$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{(x - 4)^2} = \frac{13}{(x - 4)^2}.$$

Quel que soit x de D, $f'(x) > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante dans les intervalles où elle est définie.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$-2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -2$

Courbe représentative C.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -2$. La droite d'équation $y = -2$ est donc asymptote à C.

$\lim_{x \to 4} |f(x)| = +\infty$. La droite d'équation $x = 4$ est donc asymptote à C.

Voici les coordonnées de quelques points.

x	1	0	1	2	6	7	8	9
$f(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{23}{5}$

c) Résolution de l'inéquation donnée.

Soit M (x, y) un point du plan dont les coordonnées vérifient l'inéquation (1).

Soit P $(x, f(x))$ le point de C ayant même abscisse que M. On a $\overline{PM} = y - f(x)$.

Or (1) a les mêmes solutions que (2). Les solutions de (2) sont données par :

$$x - 4 > 0 \quad \text{et} \quad \overline{PM} < 0,$$

ou

$$x - 4 < 0 \quad \text{et} \quad \overline{PM} > 0;$$

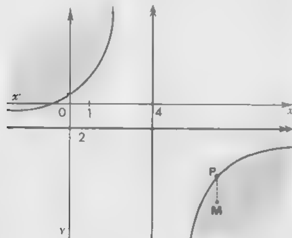


fig 6

les points dont les coordonnées vérifient (2) (donc (1)) sont les points des régions teintées sur la figure 6.

8. 6 UN PROBLÈME RÉSOLU

On considère l'équation du second degré en t :

$$xt^2 \quad 2t + y - 3 \quad 0 \qquad (E_{x,y})$$

où t désigne l'inconnue réelle et où x et y sont deux paramètres réels. A chaque point M (x, y) *d'un plan* P *rapporté à un repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *on associe ainsi une équation* $(E_{x,y})$.

1. *Discuter, suivant la position* M *dans* P *l'existence et le signe des racines de l'équation* $(E_{x,y})$. *On appellera* C *la courbe intervenant dans la discussion de l'existence des racines.*

2. *Quel est l'ensemble* Γ_{t_0} *des points* M *pour lesquels* t_0, *valeur réelle donnée, est racine de* $(E_{x,y})$

3. *Application : quelles sont les équations des tangentes issues de* A (- 2, 4) *à la courbe* C?

1 a. Étudions le nombre de racines de l'équation $(E_{x,y})$ suivant la position de M (x, y) dans le plan

Si $x = 0$ l'équation devient $-2t + y - 3 = 0$ et a une solution unique.

Supposons $x \neq 0$: l'équation est du second degré

Le discriminant de $(E_{x,y})$ est : $\Delta' = 1 - x(y - 3)$. Donc $\Delta' > 0$ si et seulement si

$$1 - xy + 3x > 0,$$

ou encore

$$xy < 3x + 1.$$

Pour $x \neq 0$ cette inégalité est équivalente à :

$$\begin{cases} x > 0 \\ \text{et} \\ y < \dfrac{3x + 1}{x} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < 0 \\ \text{et} \\ y > \dfrac{3x + 1}{x} \end{cases}$$

Dans ce cas, $(E_{x,y})$ admet deux racines distinctes.

Traduisons cette condition dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Étudions la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x}$.

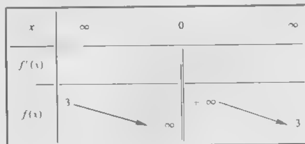
Son domaine de définition est $D = \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3 \qquad (\text{car } x > 0 \text{ et } \lim_{x \to 0} (3x + 1) = 1)$$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{3x + 1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} \frac{3x + 1}{x} = -\infty \qquad (\text{car } x < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} (3x + 1) = 1)$$

$f'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$. Donc la fonction f est strictement décroissante dans les intervalles où elle est définie



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	3 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	3

Déterminons quelques points de la courbe représentative C de f

x	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{14}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{2}$	2	1	5	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{16}{5}$

D'autre part, les droites d'équations $x = 0$ et $y = 3$ sont des asymptotes de C (fig. 7)

Les points dont les coordonnées vérifient :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad y < \frac{3x+1}{x}$$

sont situés dans un demi-plan ouvert de frontière $y'y$, contenant Ox, « au-dessous » de l'arc C_1 de la courbe C; ceux dont les coordonnées vérifient

$$x < 0 \quad \text{et} \quad y > \frac{3x+1}{x}$$

sont situés dans le demi-plan ouvert de frontière $y'y$, contenant Ox', « au-dessus » de l'arc C_2 de courbe C. Ces points correspondent à la partie *non teintée* de la figure; pour ces points $\Delta' > 0$, l'équation a deux racines distinctes

Les points situés sur C ont des coordonnées qui vérifient $\Delta' = 0$. Ils correspondent donc à des équations admettant une racine double

1 b. Discutons maintenant le *signe des racines* de $(E_{x,y})$ lorsqu'elles existent. Désignons-les par t' et t'' (cas où $x \neq 0$). On a

$$P = t't'' = \frac{y-3}{x}.$$

$$S = t' + t'' = \frac{2}{x}.$$

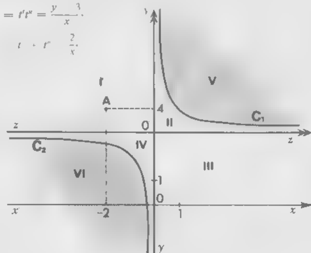


fig 7

Les signes de t' et t'' dépendent des signes de S et P, que nous allons déterminer suivant la position de M dans le plan.

Le signe de P dépend de la position de M par rapport aux droites d'équations $y = 3$ et $x = 0$. Celui de S dépend de la position de M par rapport à la droite d'équation $x = 0$.

Ces deux droites sont les asymptotes de C. Elles se coupent en O'.

La courbe C et ses asymptotes déterminent 6 régions dans le plan (frontières exclues) que nous numérotons de I à VI comme l'indique la figure 7.

Indiquons la discussion dans un tableau

Région	Δ'	P	S	Conclusion
I	> 0	< 0	< 0	$t' < 0 < t''$, $\lvert t' \rvert > t''$
II	> 0	> 0	> 0	$0 < t' < t''$,
III	> 0	< 0	> 0	$t' < 0 < t''$, $\lvert t' \rvert < t''$.
IV	> 0	> 0	< 0	$t' < t'' < 0$.
V et VI	0			pas de racines.
C_1	0	> 0	> 0	$t' = t'' > 0$
C_2	0	> 0	< 0	$t' = t'' < 0$
]O z)	> 0	0	> 0	$0 = t' < t''$
]O z')	> 0	0	< 0	$t' < t'' = 0$
]O y)	Équation du premier degré			$0 < t'$
]O y')				$t' < 0$
O'				$t' = 0$

2. t_0 est racine de l'équation donnée si et seulement si

$$x t_0^2 - 2 t_0 + y - 3 = 0.$$

Les coordonnées du point M associé à l'équation vérifient donc cette relation du 1er degré par rapport à x et y : M décrit donc une droite Γ_{t_0} d'équation $t_0^2 x + y - 2t_0 - 3 = 0$. Cherchons quelle est la position relative de Γ_{t_0} et C.
Les coordonnées des points d'intersection de Γ_{t_0} et C s'obtiennent en résolvant le système

$$(S)\begin{cases} y = \dfrac{3x+1}{x} \\ t_0^2 x + y - 2t_0 - 3 = 0. \end{cases}$$

Quels que soient $x \neq 0$ et y on a

$$(S) \iff \begin{cases} y = \dfrac{3x+1}{x} \\ t_0^2 x + \dfrac{3x+1}{x} - 2t_0 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} y = \dfrac{3x+1}{x} \\ t_0^2 x^2 + x(3 - 2t_0 - 3) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{3x+1}{x} \\ t_0^2 x^2 - 2t_0 x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{3x+1}{x} \\ (t_0 x - 1)^2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

L'équation (1) admet une racine double égale à $\dfrac{1}{t_0}$ (pour $t_0 \neq 0$). Γ_{t_0} est donc tangente à C au point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{t_0}, 3 + t_0\right)$. Pour $t_0 = 0$, Γ_0 est confondue avec l'asymptote d'équation $y = 3$. Remarquons que le coefficient directeur de Γ_{t_0} est égal à $-t_0^2$. Par suite, pour deux valeurs opposées de t_0, les droites obtenues sont parallèles entre elles.

3. Tangentes issues de A $(-2, 4)$ à C.
Au point A $(-2, 4)$ est associée l'équation : $2t^2 + 2t - 1 = 0$, dont les racines sont :

$$\frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}.$$

D'après la question 2, A appartient à deux tangentes à C, ensemble des points du plan correspondant aux équations admettant comme racine

$$t_0' = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad t_0'' = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Les équations des tangentes issues de A à C sont donc données par

$$t_0^2 x + y - 2t_0 - 3 = 0 \quad \text{où} \quad t_0 \in \{t_0', t_0''\},$$

soit

$$T_0' \quad \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) x + y + \sqrt{3} - 2 = 0$$

$$T_0'' \quad \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) x + y - \sqrt{3} - 2 = 0.$$

II. Exemples de fonctions $x \mapsto \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, où $a' \neq 0$.

8.7 EXEMPLE 1

Étude de $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 4}$

a) Domaine de définition et de continuité.

La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur n'est jamais nul. Donc f est définie et continue pour toute valeur réelle de x ; $D = \mathbb{R}$.

b) Recherche des limites.

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = +1.$$

c) Sens de variation.

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+4) - 2x(x^2+2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{-2x^2 + 8x + 8}{(x^2+4)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x - 4)}{(x^2+4)^2}.$$

Donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $x^2 - 4x - 4 = 0$ c'est-à-dire $(x-2)^2 = 8$.
Les racines de $f'(x) = 0$ sont donc $2 - 2\sqrt{2}$ et $2 + 2\sqrt{2}$.

d) Tableau de variation.

x	$-\infty$		$2 - 2\sqrt{2}$		$2 + 2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	1	↘	$\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$	↗	$\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$	↘	1

Calculons $f(2+2\varepsilon\sqrt{2})$ où $\varepsilon = 1$ ou bien $\varepsilon = -1$, ce qui donnera à la fois la valeur du minimum et du maximum et qui évitera ainsi un calcul.

Remarquons d'autre part que f étant le quotient de deux fonctions u et v; si x_0 est une racine de la dérivée, si $v(x_0) \neq 0$ et si $v'(x_0) \neq 0$ on a

$$f'(x_0) = \frac{u'(x_0)\,v(x_0) - u(x_0)\,v'(x_0)}{v(x_0)^2} = 0$$

d'où :

$$\frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$$

Donc *pour les racines* x_0 de $f'(x) = 0$ *qui ne sont pas racines de* $v(x) = 0$ ni de $v'(x) = 0$ on peut écrire

$$f(x_0) = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}.$$

Par suite : $f(2+2\varepsilon\sqrt{2}) = \dfrac{2x_0+2}{2x_0} = \dfrac{x_0+1}{x_0}$ avec $x_0 = 2+2\varepsilon\sqrt{2}$;

$$\frac{2+2\varepsilon\sqrt{2}+1}{2+2\varepsilon\sqrt{2}} = \frac{(3+2\varepsilon\sqrt{2})(1-\varepsilon\sqrt{2})}{2(1+\varepsilon\sqrt{2})(1-\varepsilon\sqrt{2})} = \frac{-1-\varepsilon\sqrt{2}}{-2}.$$

Donc : $f(2+2\sqrt{2}) = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $f(2-2\sqrt{2}) = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}.$

On remarque que ce sont respectivement le minimum absolu et le maximum absolu de f.

e) Courbe représentative C.

On a $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = +1$. Donc C admet une asymptote d'équation $y = +1$ (fig. 8).

D'autre part $f'(2+2\varepsilon\sqrt{2}) = 0$; C admet donc deux tangentes parallèles à l'axe $x'x$ aux points $A\left(2-2\sqrt{2}, \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(2+2\sqrt{2}, \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

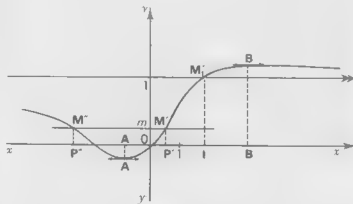


fig 8

Précisons la forme de la courbe en calculant les coordonnées de quelques points.

x	-4	3	2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{13}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{15}{13}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{35}{29}$	$\frac{6}{5}$

$$2 - 2\sqrt{2} \sim -0{,}8 \qquad 2+2\sqrt{2} \sim 4{,}5$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \simeq -0{,}2 \qquad \frac{1+\sqrt{2}}{2} \simeq 1{,}2$$

REMARQUE

D'après l'allure trouvée pour la courbe C, elle admet certainement des points d'inflexion. On pourrait les trouver en cherchant les racines de $f''(x) = 0$. En général, le calcul n'est pas simple, l'équation à résoudre étant du 3e degré. Ici, par exemple :

$$f''(x) = 4\,\frac{3x^3 - 6x^2 - 12x + 8}{(x^2+4)^3}.$$

EXERCICE

Étudier la fonction $g : x \longmapsto 3x^3 - 6x^2 - 12x + 8$, en déduire qu'il y a trois points d'inflexion pour C. (Remarquer $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$).

f) Exercice résolu.

Cherchons les points d'intersection de C avec la droite D_m d'équation $y = m$.

Lorsque $m \in \left]\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right[- \{1\}$, D_m coupe C en deux points M' et M'' distincts qui se projettent sur $x'x$ parallèlement à $y'y$ en P' et P''. Leurs abscisses s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} y = m, \\ y = \dfrac{x^2+2x}{x^2+4}, \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} y = m, \\ x^2(m-1) - 2x + 4m = 0. \end{cases}$$

Si on appelle x' et x'' les abscisses de M' et M'', ou P' et P'', on a les deux relations ($m \neq 1$) :

$$x' + x'' = \frac{2}{m-1} \qquad \text{et} \qquad x'x'' = \frac{4m}{m-1}$$

On peut en déduire une relation indépendante de m entre ces abscisses x' et x'', m étant différent de 1. On a

$$x' + x'' = \frac{2}{m-1} \quad \text{d'où} \quad m = \frac{2}{x'+x''} + 1 \tag{1}$$

et

$$x'x'' = \frac{4m}{m-1} \quad \text{d'où} \quad m = \frac{x'x''}{x'x''-4} \tag{2}$$

De (1) et (2) on déduit la relation : $\dfrac{2+(x'+x'')}{x'+x''} = \dfrac{x'x''}{x'x''-4}$ c'est-à-dire

$$2x'x'' - 8 - 4(x'+x'') = 0 \tag{3}$$

Cette relation est à rapprocher de la relation caractéristique d'une division harmonique :

$$2(x'x'' + ab) = (x'+x'')(a+b) \tag{4}$$

Par identification de (3) et (4), nous obtenons :

$$2ab = -8 \quad \text{et} \quad a + b = 4,$$

a et b sont les deux racines de l'équation $t^2 - 4t - 4 = 0$, d'où

$$a = 2 - 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad b = 2 + 2\sqrt{2}$$

Nous remarquons que a et b sont les abscisses des points A et B, représentant les extrémums de f.
Par suite, si l'on appelle A′ et B′ les projections de A et B sur $x'x$, parallèlement à $y'y$, quel que soit $m \neq 1$, on voit que (A′, B′, P′, P″) est une division harmonique. Soit I le milieu de A′B′ on a $\overline{IA'}^2 = \overline{IP'} \cdot \overline{IP''}$ d'où, si $P' \neq 0$,

$$\overline{IP''} = \frac{\overline{IA'}^2}{\overline{IP'}}$$

Si $\overline{IP'}$ tend vers zéro alors IP″ tend vers $+\infty$. Cela correspond au cas où m tend vers 1, le point M″ s'éloigne indéfiniment sur la droite D_1 et l'abscisse de M′ intersection de la droite $y = 1$ (qui est asymptote) avec C a son abscisse égale à la demi-somme des abscisses de A et B.

8. 8 EXEMPLE 2

Etude de $f : x \longmapsto \dfrac{(x + 1)^2}{x^2 + 3x}$

a) Domaine de définition et de continuité D.

Le dénominateur de $f(x)$ s'annule pour $x \in \{-3, 0\}$. Donc la fonction f est définie et continue pour toute valeur de x distincte de 0 et -3; donc $D = \mathbb{R} - \{0, -3\}$.

d) Étude des limites.

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = +1$$

Quelle que soit la valeur attribuée à x, le numérateur de $f(x)$ est strictement positif. Quant au dénominateur, son signe est indiqué dans le tableau suivant

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$x^2 + 3x$		+	0	−	0	+	

ce qui justifie les résultats suivants :

$$\lim_{x \to -3-0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -3+0} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +0} f(x) = +\infty.$$

c) Sens de variation.

$$f'(x) = \frac{2(x + 1)(x^2 + 3x) - (2x + 3)(x + 1)^2}{(x^2 + 3x)^2}$$

$$= \frac{(x + 1)[2x^2 + 6x - (2x + 3)(x + 1)]}{(x^2 + 3x)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x^2 + 3x)^2}$$

La dérivée s'annule en changeant de signe lorsque $x \in \{-1, 3\}$.

d) Tableau de variation.

x	$-\infty$		-3		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{8}{9}$	↗	1

En appliquant la remarque faite au paragraphe précédent $\left(\text{pour } x_0 \text{ tel que } f'(x_0) = 0,\ v(x_0) \neq 0 \text{ et } v'(x_0) \neq 0 \text{ la valeur de } f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \text{ est } \dfrac{u'(x_0)}{v'(x_0)}\right)$. On trouve

$$f(+3) = \frac{2(x_0 + 1)}{2x_0 + 3} = \frac{8}{9}; \qquad \text{d'autre part } f(-1) = 0.$$

Dans l'ensemble étudié 0 est un maximum relatif et $\frac{8}{9}$ un minimum relatif.

e) Courbe représentative C.

$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +1$. La droite d'équation $y = 1$ est donc asymptote à C (fig. 9).

$\lim_{x \to -3} |f(x)| = +\infty$. La droite d'équation $x = -3$ est asymptote à C.

$\lim_{x \to 0} |f(x)| = +\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C.

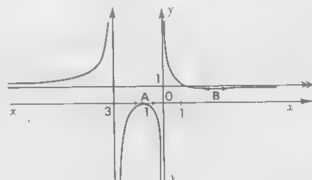


fig 9

$f'(-1) = 0$ et $f'(+3) = 0$. La courbe C admet donc des tangentes parallèles à l'axe $x'x$ aux points A $(-1, 0)$ et B $\left(+3, +\frac{8}{9}\right)$.

Coordonnées de quelques points :

x	6	5	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{25}{18}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{7}$	1	$\frac{9}{10}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{25}{28}$

f) Exercice résolu.

Dans le cas étudié $a = a' = 1$, calculons $f(x) - \frac{a}{a'}$; on a pour tout x de D

$$f(x) - 1 = \frac{(x+1)^2}{x(x+3)} - 1 = \frac{(x+1)^2 - x(x+3)}{x(x+3)} = \frac{1-x}{x(x+3)}.$$

Montrons qu'il existe A et B réels tels que pour tout x de D on ait

$$f(x) - 1 = \frac{1-x}{x(x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x}$$

On a pour tout x de D

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x} = \frac{(A+B)x + 3B}{x(x+3)},$$

d'où $A + B = -1$ et $3B = 1$, c'est-à-dire $B = \frac{1}{3}$ et $A = -\frac{4}{3}$; on a donc pour tout x de D

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x(x+3)} = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{x+3} + \frac{1}{3}\frac{1}{x}$$

Cette forme est particulièrement simple pour calculer f' et f'', on trouve

$$f'(x) = \frac{4}{3}\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2}.$$

$$f''(x) = -\frac{8}{3}\frac{1}{(x+3)^3} + \frac{2}{3}\frac{1}{x^3} = \frac{2}{3}\frac{4x^3 - (x+3)^3}{x^3(x+3)^3}$$

L'exposant 3 étant impair $4x^3 = (x+3)^3$ si et seulement si

$$x\sqrt[3]{4} = x + 3,$$

la courbe C a donc un point d'inflexion d'abscisse

$$x_0 = \frac{3}{\sqrt[3]{4} - 1} \simeq 5$$

EXERCICES

1. Pour quelles valeurs de m la droite D_m d'équation $y = m$ coupe-t-elle C en deux points M' et M''? Lorsque ces points existent, ils se projettent sur $x'x$, parallèlement à $y'y$ en P' et P''.
Démontrer qu'il existe deux points fixes I et J de $x'x$ tels que, quel que soit $m \neq 1$, (I, J, P', P'') soit une division harmonique. Que représentent ces points par rapport à la courbe C?
2. Soit K le point d'intersection de C avec l'asymptote d'équation $y = 1$. Soit Δ_k la droite de coefficient directeur k passant par K. Pour quelles valeurs de k coupe-t-elle C en deux points N' et N''? Quel est l'ensemble des milieux de [N', N''] lorsque k varie?

8. 9 EXEMPLE 3

Étude de $f : x \longmapsto \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12}$

a) Domaine de définition et de continuité.

L'équation $x^2 + x - 12 = 0$ a pour racines -4 et 3.
La fonction f est donc définie et continue pour toute valeur de x distincte de -4 et 3.
Donc $D = \mathbb{R} - \{-4, 3\}$.

b) Étude des limites.

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = +2$$

Il faut chercher les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers -4 ou 3; remarquons que :

$$\lim_{x \to -4} (2x^2 - 9x + 4) > 0 \qquad \lim_{x \to 3} (2x^2 - 9x + 4) = -5$$

et que le signe du dénominateur est donné par le tableau suivant

x	$+\infty$		4		3		∞
$x^2 + x - 12$		·	0		0		

Par suite

$$\lim_{x \to -4-0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -4+0} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 3+0} f(x) = -\infty.$$

c) Sens de variation.

$$f'(x) = \frac{(4x-9)(x^2+x-12) - (2x+1)(2x^2-9x+4)}{(x^2+x-12)^2}$$
$$= \frac{11x^2 - 56x + 104}{(x^2 + x - 12)^2}.$$

Le discriminant de $11x^2 - 56x + 104$ est égal à $28^2 - (11 \times 104) = 784 - 1144 < 0$. Donc quel que soit x appartenant à D, $f'(x) > 0$; f est donc une fonction strictement croissante sur D.

d) Tableau de variation.

x	∞		4		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	‖	+	
$f(x)$	$+2$	↗ $+\infty$	‖	∞ ↗ $+\infty$	‖	∞ ↗	$+2$

e) Courbe représentative C.

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = +2$ La droite d'équation $y = 2$ est donc asymptote à C.

$\lim\limits_{x \to -4} |f(x)| = +\infty$. La droite d'équation $x = -4$ est donc asymptote à C.

$\lim\limits_{x \to 3} |f(x)| = +\infty$. La droite $x = 3$ est asymptote à C.

Déterminons quelques points de C (fig. 10).
Les points d'intersections de C avec l'axe $x'x$ ont leurs abscisses qui vérifient

$$2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$\Delta = 81 - 32 = 49$; donc

$$x' = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{9+7}{4} = 4$$

La courbe C coupe l'asymptote $y = 2$ au point dont les coordonnées vérifient

$$\begin{cases} y = 2, \\ y = \dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12}, \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} y = 2, \\ 2(x^2 + x - 12) = 2x^2 - 9x + 4; \end{cases}$$

on trouve un seul point $\left(x = \frac{28}{11}, y = 2\right)$.

Voici quelques points qui permettent de préciser l'allure de C

x	7	6	5	3	2	1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	4	5
$f(x)$	$\frac{11}{2}$	$\frac{65}{9}$	$\frac{99}{8}$	$\frac{49}{6}$	3	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	1	2	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{2}$

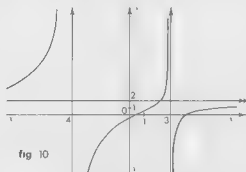


fig 10

EXERCICE

Soit D_k une droite quelconque passant par K, point d'intersection de C et de $y = 2$, de coefficient directeur k.
Pour quelles valeurs de k coupe-t-elle C en deux points P' et P'' distincts de K?
Lorsque les points P' et P'' existent, quel est l'ensemble des points M, milieux des segments [P', P''] quand k prend toutes les valeurs possibles?

Discuter graphiquement l'équation suivante où x représente l'inconnue réelle, et k un paramètre réel

(1) $$kx^2 + (3k + 1)x + 2k = 0$$

Placer les racines par rapport aux nombres -4 et 0.

Quels que soient les nombres réels x et k nous avons

(2) $$kx^2 + (3k + 1)x + 2k = 0 \iff k(x^2 + 3x + 2) = -x$$

$x^2 + 3x + 2$ s'annule pour $x' = -1$ et $x'' = -2$ qui, quel que soit k, ne sont pas racines de l'équation (2). Donc la relation (2) est équivalente à

$$k = \frac{-x}{x^2 + 3x + 2}$$

La relation (2) représente l'équation aux abscisses des points d'intersection de la droite D_k d'équation $y = k$ et de la courbe représentative C de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + 3x + 2}$$

Nous allons donc construire C (qui est indépendante de k) et étudier le nombre de points d'intersection de C et de D_k. Plus précisément, nous comparerons les abscisses des points d'intersection aux deux valeurs -4 et 0

a) Étude de la fonction f.

$$D = \mathbb{R} - \{-1, -2\}.$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{|x| \to \infty} \frac{-x}{x^2} = 0$$
$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -2-0} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -2+0} f(x) = -\infty.$$

Sens de variation

$$f'(x) = \frac{-(x^2 + 3x + 2) - (2x + 3)(-x)}{(x^2 + 3x + 2)^2} = \frac{x^2 - 2}{(x^2 + 3x + 2)^2}.$$

D'où le tableau de variation

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$3 + 2\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-3 + 2\sqrt{2}$	↗	0

On calcule $f(\sqrt{2})$ et $f(\cdot\ \sqrt{2})$ grâce à la remarque faite au § 8. 7 d

$$f(\varepsilon\sqrt{2}) = \frac{-1}{2\,x_0 + 3} - \frac{-1}{2\,\varepsilon\sqrt{\ }2\quad 3} - \frac{-1\,(2\,\varepsilon\sqrt{2} - 3)}{8\quad 9} - -3 + 2\,\varepsilon\sqrt{2}$$

où $x_0 = \varepsilon\sqrt{2}$ ($\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$) donc $f(\sqrt{2}) = -3 + 2\sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2}) = -3 - 2\sqrt{2}$.

b) Courbe représentative C.

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote de C (fig. 11).

$\lim\limits_{x\to-3} |f(x)| = +\infty$: la droite d'équation $x = -3$ est donc asymptote de C.

$\lim\limits_{x\to-1} |f(x)| = +\infty$: la droite d'équation $x = -1$ est asymptote de C.

$f'(-\sqrt{2})$ et $f'(\sqrt{2})$ sont nuls. Donc C admet des tangentes parallèles à $x'x$ aux points A ($\sqrt{2}$, 3 $2\sqrt{2}$) et B ($\sqrt{2}$, 3 $2\sqrt{2}$).

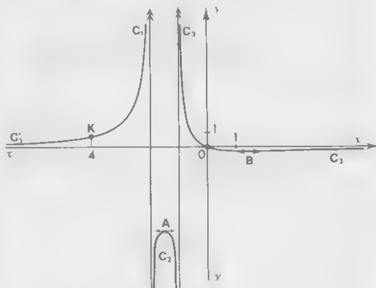


fig 11

Voici quelques points particuliers de C.

x	-6	-5	-4	-3		$-\sqrt{2}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\sqrt{2}$	2
$f(x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	3	$\sqrt{\ }2$	$\frac{30}{7}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-3+2\sqrt{2}$	$\frac{1}{6}$

Notons, en particulier que :

$$f(-4) = \frac{2}{3} \text{ et } f(0) = 0; \text{ soit K } \left(-4, \frac{2}{3}\right) \text{ et } 0\ (0, 0).$$

c) Discussion de l'équation (1).

Prenons les notations suivantes (fig. 11)

C_1' l'ensemble des points C tels que $x < -4$,
C_1 — $-4 < x < -2$,
C_2 — $2 < x < -1$,
C_3' — $-1 < x < 0$,
C_3 — $0 < x$.

Nous obtenons le tableau de résultats suivant

k	$D_k \cap C$	équation (1)
k ~ 3 $2\sqrt{2}$	$M' \in C_2$, $M'' \in C_2$	$-4 < x' < x'' < 0$
k $-3-2\sqrt{2}$	D_k tangente à C_2 en A	4 x'' $\sqrt{2} < 0$
$-3-2\sqrt{2} < k < -3+\sqrt{2}$	$D_k \cap C = \varnothing$	pas de racines
$k = -3+2\sqrt{2}$	D_k tangente à C_3 en B	$0 < x' = x'' = \sqrt{2}$
$-3+2\sqrt{2} < k < 0$	$M' \in C_3$, $M'' \in C_3$	$0 < x' < x'$
k 0	$M' = 0 \in C \cap (x'x)$	$x' = 0$
$0 < k < \frac{2}{3}$	$M' \in C_1'$, $M'' \in C_3'$	$x' < -4 < x'' < 0$
k $\frac{2}{3}$	M K, M $\in C_3'$	x $-4 < x'' < 0$
$\frac{2}{3} < k$	$M' \in C_1$, $M'' \in C_3'$	$-4 < x' < x'' < 0$

III. Exemples de fonctions

$$x \longmapsto \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'} \quad \text{où } aa' \neq 0.$$

8. 11 EXEMPLE 1

Étude de $f : x \longmapsto \frac{x^2 \; 2x \quad 3}{2x}$.

a) Domaine de définition et de continuité.

Le nombre $f(x)$ peut être calculé pour toute valeur *non nulle* de x ; f est définie et continue dans $D = \mathbb{R}^*$.

b) Étude des limites.

On obtient, en divisant le numérateur de $f(x)$ par son dénominateur

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{3}{2x}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty,$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty,$

$\lim\limits_{x \to +0} f(x) \quad \lim\limits_{x \to 0} \quad \frac{3}{2x} \quad \infty,$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} - \frac{3}{2x} = +\infty.$

c) Sens de variation.

Utilisons encore la forme $f(x) \quad \frac{x}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2x}$

$$f'(x) \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2x^2}$$

$$(\forall x \quad {}^*) \quad f'(x) \quad 0$$

Donc f est strictement croissante dans les intervalles où elle est définie.

d) Tableau de variation.

x	∞	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	∞ ↗ $+\infty$	‖	∞ ↗ ∞

e) Courbe représentative C.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \quad +\infty$ Donc la droite d'équation $x \quad 0$ est asymptote à C (fig 12)

Précisons quelques points.

x	5	−4	3	2	-1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{3}{4}$	2	‖	$\frac{39}{8}$	$\frac{17}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	2	$\frac{21}{8}$

D'autre part designons par g la fonction affine $x \longmapsto \frac{x}{2} + 1$, nous avons pour tout x non nul

$$f(x) = g(x) - \frac{3}{2x}$$

d'où

$$\lim_{|x| \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

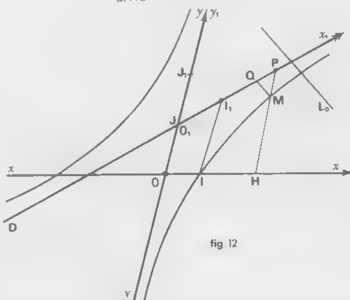


fig 12

La courbe représentative de g est une droite D, appelons M un point quelconque de C et P le point de D ayant même abscisse que M nous avons (fig. 12)

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = f(x) - g(x)$$

d'où

$$\lim_{|x| \to \infty} \overline{PM} \quad 0.$$

Soit L_0 une droite non parallèle à D, de vecteur directeur $\vec{k}$; la parallèle à L_0 passant par M coupe D en Q (fig 12); $\vec{j}$ étant le vecteur directeur choisi pour l'axe $y'y$ on a

$$\vec{PM} \quad \overline{PM}\,\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{QM} = \overline{QM}\,\vec{k}$$

Quel que soit le point M de C, $\dfrac{\overline{QM}}{\overline{PM}}$ est constant (propriété des projections); posons

$\dfrac{\overline{QM}}{\overline{PM}} = \lambda$, soit $\overline{QM} = \lambda\overline{PM}$, on aura

$$\lim_{x \to \infty} \overline{QM} = \lambda \lim_{x \to \infty} \overline{PM} \quad 0.$$

Ce résultat est indépendant de λ, donc de $\vec{k}$, donc de la direction de L_0, non parallèle à D : il ne dépend que de la fonction f ·

Nous dirons que la droite D d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 1$ est *asymptote* à C lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$; cette asymptote n'est pas parallèle aux axes comme les asymptotes rencontrées jusqu'à maintenant; on dit que c'est une **asymptote oblique.**
D'une manière plus précise on a

$$\overline{PM} = f(x) - g(x) = -\frac{3}{2x}$$

d'où

$$\lim_{x \to -\infty} \overline{PM} = +0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \overline{PM} = -0$$

nous pouvons donc « *placer la courbe par rapport à son asymptote* » pour les points où $|x|$ est « grand ».

f) Exercice résolu.

Désignons par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ancien repère et considérons un nouveau repère $(O_1, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ tel que les nouveaux axes soient les deux asymptotes trouvées, D d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 1$ et la droite $y'y$. La nouvelle origine est O_1 (0, 1) on a donc

$$\vec{OO_1} = \vec{j}$$

Conservons le vecteur $\vec{j}$ pour vecteur directeur de $y'y$ donc

$$\vec{j_1} \quad \vec{j}$$

et prenons pour $\vec{i_1}$ le vecteur $\vec{O_1I_1}$, I_1 étant le point D de coordonnées (anciennes) $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$, on a

$$\vec{i_1} \quad \vec{O_1I_1} \quad O\,O \quad OI_1 \qquad j \cdot \left(\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}\right) \quad \vec{i} \quad \frac{1}{2}\vec{j}\,.$$

ces deux vecteurs $\vec{i_1}$ et $\vec{j_1}$ constituent une base du plan vectoriel associé au plan considéré car ils ne sont pas colinéaires.
Désignons respectivement par (x, y) et (x_1, y_1) les coordonnées de M relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et au repère $(O_1, \vec{i_1}, \vec{j_1})$; on a

$$(1) \qquad \vec{OM} \quad x\vec{i} + y\vec{j} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{OO_1} = \vec{j} \\ \vec{i_1} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \\ \vec{j_1} = \vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{O_1M} = x_1\vec{i_1} + y_1\vec{j_1}$$

On en déduit

$$(2) \qquad \vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M} = \vec{j} + x_1\left(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) + y_1\vec{j} = x_1\vec{i} + \left(\frac{x_1}{2} + y_1 + 1\right)\vec{j}.$$

D'après l'unicité du couple des coordonnées d'un vecteur dans une base on a

$$\frac{x_1}{2} \quad \cdot \quad 1$$

Un point M (x, y) appartient à C si et seulement si

$$y = \frac{x}{2} + 1 - \frac{3}{2x};$$

le point M (x_1, y_1) appartient donc à C si et seulement si

$$\frac{x_1}{2} + y_1 + 1 = \frac{x_1}{2} + 1 - \frac{3}{2x_1}$$

c'est-à-dire

$$y_1 = -\frac{3}{2x_1}$$

Donc C est, relativement au nouveau repère $(O_1, \vec{i_1}, \vec{j_1})$, la courbe représentative de la fonction homographique f_1 définie pour tout $x_1 \neq 0$ par

$$f_1(x_1) = \frac{3}{2x}$$

c'est donc une *hyperbole*. Nous retrouvons ainsi que C admet pour asymptotes $y'y$ et D

8. 12 EXEMPLE 2

Étude de $f : x \longmapsto \dfrac{-(2x^2 + 3x \quad 9)}{2(x+1)}$

a) Domaine de définition et de continuité.

Cette fonction est définie et continue pour tout $x \neq -1$ c'est-à-dire pour tout x de D

$$D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$$

On pourrait calculer la dérivée et étudier les variations de cette fonction comme d'habitude (faites-le à titre d'exercice).
Il est plus simple de procéder comme suit : dans l'exemple 1 nous avions trouvé pour tout $x \neq 0$

$$\frac{x^2 \quad 2x \quad 3}{2x} \quad \frac{x}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2x}$$

c'est-à-dire que la fonction étudiée dans cet exemple 1 était la somme d'une fonction affine et de la fonction $x \longmapsto \frac{3}{2x}$ Nous allons obtenir un résultat analogue pour la fonction f de l'exemple que nous sommes en train d'étudier en changeant de variable.
Posons

$$x \quad \cdot \quad X$$

ou $x = X - 1$; nous avons pour tout $x \neq -1$, c'est-à-dire pour tout $X \neq 0$

$$f(x) = -\frac{2x^2 + 3x + 9}{2(x+1)} = -\frac{2(X-1)^2 + 3(X-1) + 9}{2X} = -\frac{2X^2 - X + 8}{2X}$$
$$= -X + \frac{1}{2} - \frac{4}{X}$$

d'où pour tout $x \neq -1$

$$f(x) = -(x+1) + \frac{1}{2} - \frac{4}{x+1} = -x - \frac{1}{2} - \frac{4}{x+1}.$$

L'étude de f est plus simple avec cette nouvelle forme pour $f(x)$.

b) Étude de f.

$D = \mathbb{R}^* - \{-1\}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} -\frac{4}{x+1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-0} -\frac{4}{x+1} = +\infty$

$$f'(x) = -1 + \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)^2 + 4}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = -3$, d'où le signe de $f'(x)$.

Résumons ces résultats dans un tableau :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{7}{2}$	↘	$-\infty$

Lorsque $x = -3$ ou $x = +1$, $f'(x) = 0$. Or $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, donc $f'(x_0) = 0$ est équivalent à $u'(x_0)\,v(x_0) - u(x_0)\,u'(x_0) = 0$ avec $v(x_0) \neq 0$ et, par suite

$$f(x_0) = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = \frac{-4x_0 - 3}{2}$$

d'ou : $f(-3) = \frac{12 - 3}{2} = \frac{9}{2}$, $f(1) = \frac{-4-3}{2} = -\frac{7}{2}$.

c) Courbe représentative C.

La droite D_1 d'équation $x = -1$ est asymptote à C (fig. 13) : elle est parallèle à $y'y$.
D'autre part si on désigne par D la droite d'équation

$$y = -x - \frac{1}{2},$$

D est la courbe représentative de la fonction affine g définie par $g(x) = -x - \frac{1}{2}$,

on a donc pour tout $x \neq -1$

$$f(x) - g(x) = -\frac{4}{x+1}$$

d'où

$$\lim_{|x| \to \infty} |f(x) - g(x)| = \lim_{|x| \to +\infty} \left|\frac{4}{x+1}\right| = 0.$$

Si on désigne par M et P deux points appartenant respectivement à C et à D et ayant même abscisse on a donc (fig. 13)

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = f(x) - g(x) = -\frac{4}{x+1}$$

d'où

$$\lim_{x \to -\infty} \overline{PM} = +0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \overline{PM} = -0$$

nous dirons que D est asymptote à C et pour les « grandes » valeurs de x nous savons placer C par rapport à D. La droite D non parallèle aux axes est une *asymptote oblique*.

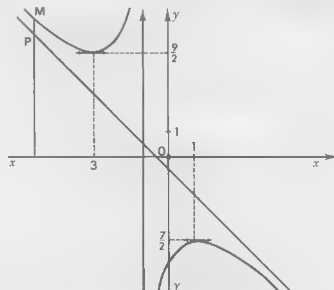


fig 13

1) Désignant par $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ l'ancien repère, montrer que le repère $(\vec{O}_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ défini par

$$\begin{cases} \overrightarrow{OO_1} = -\vec{i} + \dfrac{\vec{j}}{2} \\ \vec{i}_1 = \vec{i} - \vec{j} \\ \vec{j}_1 = \vec{j} \end{cases}$$

est un repère dont l'axe des abscisses est porté par l'asymptote oblique D d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ et l'axe des ordonnées par l'asymptote D_1 d'équation $x = -1$. (On remarquera que O_1 est l'intersection de D et D_1 et que si I_1 est le point d'intersection de D et $y'y$ on a pris $\vec{i}_1 = \overrightarrow{O_1I_1}$).

2) Montrer que pour tout point M ayant pour coordonnées (x, y) dans $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ et (x_1, y_1) dans $(\vec{O}_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ on a

$$\begin{cases} x = x_1 - 1 \\ y = -x_1 + y_1 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(Écrire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{OO_1} + x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1$).

3) Montrer que C est, relativement au nouveau repère la courbe représentative de la fonction f_1 définie pour tout $x_1 \neq 0$ par

$$f_1(x) = \frac{-4}{x_1}.$$

d) Généralisation.

Soit à étudier la fonction f

$$x \longmapsto \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$$

avec $aa' \neq 0$ (pour $a = 0$ on a une fonction homographique et pour $a' = 0$ une fonction du second degré).

Cette fonction est définie dans $D = \mathbb{R}^* - \left\{-\frac{b'}{a'}\right\}$.

Posons

$$x + \frac{b'}{a'} = X$$

c'est-à-dire $x = X - \frac{b'}{a'}$; un calcul facile montre que pour tout $x \neq -\frac{b'}{a'}$ (c'est-à-dire $X \neq 0$) on a

$$f(x) = \frac{AX^2 + BX + C}{X} = AX + B + \frac{C}{X}$$

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{a'x + b'}$$

où A, B, C, α, β, γ sont des nombres réels qui s'expriment à l'aide de a, b, c, a', b'.

On trouvera en particulier que $\alpha = \frac{a}{a'} \neq 0$.

On montrera comme dans l'exemple 2 que la courbe représentative C de f a une *asymptote* D_1 *parallèle à* $y'y$ d'équation $a'x + b' = 0$ et une *asymptote « oblique »* D d'équation $y = \alpha x + \beta$.

En prenant pour repère $(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ dont les axes sont portés respectivement par D et D_1 on montrera que C est une hyperbole ayant pour asymptotes D et D_1.

EXERCICES

Exercices sur la fonction homographique.

Variations et courbes représentatives : 1 à 6.
Détermination de fonction homographique : 7 à 31.
Étude de fonctions définies par des valeurs absolues, sup ou inf : A, B, 32 à 40, 48 à 51.
Étude de fonctions où intervient la partie entière d'un nombre : 41 à 47
Famille de fonctions homographiques : C, 52, 53, 64, 65.
Problèmes divers (Hyperbole) : 54 à 59, 62 et 63.
Discussion graphique d'équations : D, 60, 61.
Résolution d'équations (avec valeurs absolues) : 66 à 72.
Résolution graphique de systèmes ou d'inéquations : 73 à 82

Exercices sur les fonctions f telles que $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ $(a' \neq 0)$.

Variations et constructions de courbes : 83 à 100.
Détermination de fonctions : 101 et 102.
Problèmes divers : 103 à 108, 110, 117
Famille de fonctions : 106, 109, 111.
Discussion graphique d'équations : 112 à 116.

Exercices sur les fonctions f telles que $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ $(a' \neq 0)$.

Variations et courbes représentatives : 118 à 127.
Discussion graphique d'équations : 128 à 133.
Détermination de fonctions : 131, 134 à 138.
Problèmes divers : 139 à 147.
Famille de fonctions : 141, 143, 144 et 146.

Exercices sur les fonctions rationnelles : 148 à 158.

Exercices partiellement résolus.

8.A Étude de $f : x \longmapsto \sup\left(\frac{4}{x} - \frac{x}{2}, \frac{2x}{x+3}\right)$

On posera $f_1(x) = \frac{4}{x} - \frac{x}{2}$ *et* $f_2(x) = \frac{2x}{x+3}$, *on cherchera le signe de* $f_1(x) - f_2(x)$ *suivant les valeurs de x ; on démontrera que f prend les valeurs indiquées dans le tableau ci-dessous.*

x	$-\infty$		-3		$-\frac{4}{3}$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$f_2(x)$	‖	$f_1(x)$	0	$f_2(x)$	‖	$f_1(x)$	0	$f_2(x)$	

Après avoir étudié les variations de f_1 *et* f_2 *on trouvera le tableau de variation suivant pour f*

x	$-\infty$		3		$\frac{4}{3}$		2		3		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $\frac{7}{5}$	↘	$\frac{8}{5}$	↗	$\frac{4}{5}$ ‖ $+\infty$	↘	$+1$	↗	$+2$

8.B Étude de la fonction $g : x \longmapsto \frac{3 - |x|}{|x - 1|}$.

Suivant les valeurs de x, les diverses valeurs de g (x) sont indiquées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$g(x)$	$\frac{3+x}{1-x}$	3	$\frac{3-x}{1-x}$	‖	$\frac{3-x}{x-1}$

On trouvera le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	↗	3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

8.C Étude de la famille de fonctions $f_m : x \longmapsto f_m(x) = \frac{(m-3)x + m + 2}{x - 2m}$.

a) Sens de variation suivant les valeurs de *m*.
b) Les courbes C_m passent par des points fixes; cas d'exceptions.
c) Ensemble des points d'intersection des asymptotes de C_m.

a) *Si l'on appelle D_m le domaine de définition de f_m (qui est à préciser) on montrera que*

si $m \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$, f_m *est strictement croissante dans* D_m,

si $m \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup]2, +\infty[$, f_m *est strictement décroissante dans* D_m,

si $m = \frac{1}{2}$, $f_{1/2}$ *est constante dans* $D_{1/2}$,

si $m = 2$, f_2 *est constante dans* D_2.

b) *Les points fixes sont :* $A(1, -1)$ *et* $B\left(4, -\frac{5}{2}\right)$. *Mais* $A \notin C_{1/2}$ *et* $B \notin C_2$.

c) *On trouvera comme ensemble des points d'intersection des asymptotes une droite, privée de deux points, définie par*

$$y = \frac{x}{2} - 3 \qquad \text{avec} \qquad x \in \mathbb{R} - \{1, 4\}.$$

8.D Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel *m*, le nombre des racines de l'équation

$$x^2 + (1 - 2m)x + m + 3 = 0$$

et leur position par rapport aux nombres 0 et 3 en utilisant une méthode graphique.

L'équation donnée s'écrit

(1) $$x^2 + x + 3 + m(-2x + 1) = 0$$

pour toute valeur de m, $\frac{1}{2}$ *n'est pas racine; on peut donc écrire*

(1') $$m = \frac{x^2 + x + 3}{2x - 1}$$

et on cherchera les points d'intersection de la courbe représentative C de la fonction f *définie pour* $x \neq \frac{1}{2}$ *par*

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 3}{2x - 1}$$

et de la droite D_m *d'équation* $y = m$.

En posant $x = \frac{1}{2} + x_1$ *on obtiendra*

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4} + \frac{15}{4(2x - 1)}.$$

On a

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)^2 - 15}{2(2x - 1)^2}$$

d'où le tableau de variation de f *et la courbe* C.

On tracera la courbe C *avec les points d'abscisses* $\frac{1 - \sqrt{15}}{2}$ $\left(\textit{maximum } M_1 = \frac{2 - \sqrt{15}}{2}\right)$, $\frac{1 + \sqrt{15}}{2}$ $\left(\textit{minimum } M_2 = \frac{2 + \sqrt{15}}{2}\right)$, 0 $(f(0) = -3)$ *et* 3 $(f(3) = 3)$; *on trouve alors*

$m < -3$	$x' < 0 < x'' < 3$,
$m = -3$	$x' < 0 = x'' < 3$,
$-3 < m < \frac{2 - \sqrt{15}}{2}$	$x' < x'' < 0 < 3$,
$m = \frac{2 - \sqrt{15}}{2}$	$x' = x'' < 0 < 3$,
$\frac{2 - \sqrt{15}}{2} < m < \frac{2 + \sqrt{15}}{2}$	*pas de racine*,
$m = \frac{2 + \sqrt{15}}{2}$	$0 < x' = x'' < 3$,
$\frac{2 + \sqrt{15}}{2} < m < 3$	$0 < x' < x'' < 3$,
$m = 3$	$0 < x' < x'' = 3$,
$3 < m$	$0 < x' < 3 < x''$.

Exercices sur la fonction homographique.

Étudier les fonctions f *suivantes et construire leur courbe représentative C (ex. 1 à 6).*

8.1 $f(x) = \frac{2 - x}{x - 1}$ **8.2** $f(x) = -\frac{5}{x}$.

8.3 $f(x) = \frac{3}{x - 1}$.   **8.4** $f(x) = \frac{2x + 3}{1 - 2x}$.

8.5 $f(x) = \frac{5x - 4}{3x + 2}$ **8.6** $f(x) = \frac{3}{2x - 1}$.

Déterminer les coefficients a, b, c, d *de la fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ *pour que la courbe représentative* Γ *de* f *passe par les points* A, B, C *donnés, construire* Γ *(ex. 7 à 10).*

8.7 A (2, 13), B (0, − 3), C (− 1, + 1).

8.8 A (4, 5), $B\left(5, \frac{7}{2}\right)$, $C\left(-1, \frac{5}{4}\right)$.

8.9 A (1, 2), B (1, 4), $C\left(3, \frac{2}{5}\right)$.

8.10 A (3, − 1), $B\left(-2, \frac{1}{4}\right)$, C (0, 2).

Déterminer les coefficients a, b, c, d *de la fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ *pour que la courbe représentative* Γ *de* f *passe par* A *et admette comme asymptotes les droites* D *et* D' *données. Construire* Γ *(ex. 11 à 14).*

8.11 A (2, − 1), $D : y = -\frac{5}{4}$, $D' : x = \frac{1}{4}$

8.12 $A\left(2, \frac{1}{4}\right)$, $D : y = \frac{2}{3}$, $D' : x = \frac{2}{3}$.

8.13 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{9}\right)$, $D : y \quad \frac{3}{5}$, $D' : x \quad \frac{2}{5}$

8.14 $A\left(2, \frac{1}{5}\right)$, $D : y \quad 2$, $D' \quad x \quad 3$

Déterminer les coefficients a, b, d *de la fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{ax + b}{x + d}$ *pour que la courbe représentative* Γ *de* f *soit tangente aux droites* D_1, D_2, D_3 *(ex. 15 et 16).*

8.15
$D_1 : 2y - x - 3 = 0$
$D_2 : 8y - x - 11 \quad 0$
$D_3 : 2y \quad x \quad 11 \quad 0$

8.16
$D_1 \quad y \quad 3x \quad 14 \quad 0$
$D_2 : y + 3x - 2 \quad 0$
$D_3 \quad 4y \cdot 3x \quad 2 \quad 0$

Déterminer les coefficients a, b, d *de la fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{ax + b}{x + d}$ *pour que la courbe représentative* Γ *de* f *passe par les points* A *et* B *donnés et soit tangente à la droite D donnée (ex. 17 et 18).*

8.17 A (− 1, 1), $B\left(-3, \frac{7}{3}\right)$, $D : y = -4x + 1$.

8.18 A (3, 2), B (2, 3), $D : y = -2x - 1$.

Déterminer les coefficients a, b, d *de la fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{ax + b}{x + d}$ *de telle sorte que la courbe représentative* Γ *de* f *passe par A et soit tangente aux droites* D_1 *et* D_2 *données (ex. 19 et 20).*

8.19 A (3, − 3), $D_1 : y = 4x - 6$, $D_2 : 2y - 2x + 3 = 0$.

8.20 A (1, − 1), $D_1 : 2y - x + 1 = 0$, $D_2 : y - 2x - 13 = 0$.

Déterminer les coefficients a, b, c, d *de la fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ *de façon que la courbe représentative* Γ *de* f *admette pour asymptotes les droites* D_1 *et* D_2 *et soit tangente à la droite* Δ *(ex 21 à 23).*

8.21 $D_1 : x = -2$, $D_2 : y = 3$, $\Delta : 13x - 25y - 29 = 0$.

8.22 $D_1 : x \quad \frac{4}{5}$, $D_2 \quad y = \frac{2}{5}$, $\Delta \quad y \cdot 17x \quad 20 = 0$

8.23 $D_1 \quad x \quad 1$, $D_2 \quad y \quad 1$, $\Delta \quad y \quad x \quad 6$.

Déterminer les coefficients a, b, c, d *d'une fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ *de telle sorte que la courbe représentative* Γ *de* f *admette pour asymptote la droite* D, *soit tangente à* Δ *et passe par* A *(ex 24 et 25).*

8.24 $D \quad x \quad \frac{8}{2}$, $\Delta : y + x - 1 \quad 0$, $A\left(4, -\frac{1}{3}\right)$

8.25 $D : y = -3$, $\Delta : 11x - 4y - 12 = 0$, $A\left(1, \frac{2}{3}\right)$.

Déterminer les coefficients a, b, c, d *d'une fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ *de façon que la courbe représentative* Γ *de* f *passe par* A *et* B *et admette pour asymptote la droite* D (ex. 26 à 29).

8.26 $A\left(2, \frac{8}{7}\right)$, $B\left(1, \frac{5}{3}\right)$, $D \quad y \quad \frac{3}{4}$.

8.27 A (3, 3), B (2, 1), $D \quad y \quad 2$

8.28 $A\left(3, -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-1, \frac{5}{4}\right)$, $D : x \quad \frac{3}{5}$

8.29 $A\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{13}\right)$, $B\left(-\frac{1}{7}, \frac{17}{7}\right)$, $D : x \quad \frac{2}{7}$.

Déterminer les coefficients a, b, d *d'une fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{ax + b}{x + d}$ *de telle sorte que la courbe représentative* Γ *de* f *admette pour asymptote la droite* D *et soit tangente aux droites* Δ_1 *et* Δ_2 *(ex. 30 et 31).*

8.30 $D : x = -3$, $\Delta_1 \quad 7x \quad 16y \quad 3 \quad 0$, $\Delta_2 \quad 7x \quad 9y \quad 3 \quad 0$

8.31 $D : x = 2$, $\Delta_1 : y + 6x - 3 \quad 0$, $\Delta_2 : 3y + 8x - 1 = 0$.

Étudier et représenter graphiquement les fonctions f *suivantes (ex. 32 à 40).*

8.32 $f(x) = \frac{|x - 1|}{1 - |x|}$

8.33 $f(x) = \frac{|x + 3|}{|x| + 3}$.

8.34 $f(x) \quad \left|\frac{x \quad 2}{x + 1}\right|$

8.35 $f(x) \quad \frac{|x \quad 2|}{x \quad 1}$.

8.36 $f(x) = \frac{x - 2}{|x + 1|}$.

8.37 $f(x) = \frac{|x| - 2}{|x| + 1}$.

8.38 $f(x) \quad \frac{|x \quad 2| + |2x \quad 3|}{|x \quad 1|}$. Tangentes aux points remarquables.

8.39 $f(x) = \frac{|x - 1| - |2x + 1|}{|x|}$. Tangentes aux points remarquables.

8.40 $f(x) = \frac{x}{|x \cdot 1|} \quad \frac{x \quad 3}{|x \quad 2|}$. Tangentes aux points remarquables

Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes (ex. 41 à 47).

8.41 $f(x) = \dfrac{3}{E(x)}$. 8.42 $f(x) = \dfrac{3}{|E(x)|}$.

8.43 $f(x) = \dfrac{3x}{E(x)}$ 8.44 $f(x) = \dfrac{3x}{E(x)}$

8.45 $f(x) = \dfrac{1}{x - E(x)}$ 8.46 $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{E(x)}$

8.47 $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$

Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes (ex. 48 à 51).

8.48 $f(x) = \text{Sup}\left(\dfrac{x-7}{2x+1}, x-3\right)$. **8.49** $f(x) = \text{Inf}\left(\dfrac{3-x}{2x-1}, 2x+3\right)$.

8.50 $f(x) = \text{Sup}\left(\dfrac{2x-1}{x}, \dfrac{-1}{x-3}\right)$. **8.51** $f(x) = \text{Inf}\left(\dfrac{3x-1}{x+3}, \dfrac{x+4}{3x-2}\right)$.

8.52 On considère les fonctions f_m définies par $f_m(x) = \dfrac{-x+m}{x+m^2}$, où m est un paramètre réel.

a) Déterminer, suivant les valeurs de m, le sens de variation de la fonction f_m.
b) Construire les courbes représentatives C_m de f_m lorsque

$$m \in \left\{-2, -\frac{1}{2}, -1, 1, 0\right\}.$$

c) Quel est l'ensemble des points d'intersection des asymptotes de C_m lorsque m varie?

8.53 Soit les fonctions f_m définies par : $f_m(x) = \dfrac{2mx-1}{-x+m}$ et leurs courbes représentatives C_m. (m est un paramètre réel).

a) Démontrer que C_m passe par des points fixes lorsque m varie.
b) Quel est le sens de variation de ces fonctions f_m?
c) Quel est l'ensemble des points d'intersection des asymptotes de C_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?
d) Pour quelles valeurs de m la courbe C_m rencontre-t-elle la droite d'équation $y = x$ en deux points M' et M" distincts ou confondus?
Quel est l'ensemble des milieux de [M', M"] lorsque m varie?

8.54 *a)* Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x+1}$. La représenter graphiquement par une courbe C.
b) On coupe C par la droite D_m d'équation $y = x + m$. Pour quelles valeurs réelles de m existe-t-il des points d'intersection M' et M" distincts ou confondus?
Lorsque M' et M" existent, ils se projettent sur $x'x$, parallèlement à $y'y$, en P' et P''. Démontrer que, lorsque m varie, P' et P" restent conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes A et B.
c) Quel est l'ensemble des milieux de [M', M"] lorsque m varie?

8.55 *a)* Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$.
Construire sa courbe représentative C.
b) On considère la droite D_m d'équation $y = mx$. Pour quelles valeurs réelles de m la droite D_m coupe-t-elle C en deux points M' et M" distincts ou confondus?
Quel est l'ensemble des conjugués harmoniques de O par rapport à M' et M" lorsque m varie?
Écrire les équations des tangentes issues de O à la courbe C. Déterminer les coordonnées des points de contact de C avec ces tangentes. Que peut-on dire de ces points?

c) Par le point A (− 2, 3), on mène une droite Δ_k de coefficient directeur k. Pour quelles valeurs réelles de k, Δ_k coupe-t-elle C en deux points P' et P", distincts ou confondus?
Quel est l'ensemble des conjugués de A par rapport à P' et P" lorsque k varie?

8.56 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3-x}{x+2}$

a) Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative C dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
b) On construit la droite D_m d'équation $y = 2x + m$ qui coupe C en deux points P' et P"
Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OP''}$ est constant lorsque m varie.
On construit le point P_1 tel que : $\|\overrightarrow{OP_1}\| = \|\overrightarrow{OP''}\|$ et $(\overrightarrow{OP''}, \overrightarrow{OP_1}) = +\dfrac{\pi}{2}$.
Démontrer que l'aire du triangle $OP'P_1$ reste constante lorsque m varie.
c) Soit le point A (1, 2).
Étudier le produit scalaire $\overrightarrow{AP'} \cdot \overrightarrow{AP''}$.
En déduire m pour que $\widehat{P'AP''}$ soit droit.

8.57* Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{k}{x}$ ($k \in \mathbb{R}^*$). Soit C sa courbe représentative.

a) Quel est l'ensemble des milieux des cordes de coefficient directeur m? Discuter suivant les valeurs de m.
b) Une droite de coefficient directeur m coupe C en M' et M" et ses asymptotes en P' et P". Démontrer que [M', M"] et [P', P"] ont même milieu.
En déduire une construction d'un point quelconque d'une hyperbole quand on connaît ses asymptotes et un point A qui lui appartient.
Quel résultat obtient-on lorsqu'on fait tendre M" vers M'?

8.58** Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, C sa courbe représentative dans un plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Par un point M (x_0, y_0), on mène une droite de coefficient directeur m qui coupe C en P' et P" (on précisera la condition pour que P' et P" existent).
a) Calculer les coordonnées de N, conjugué harmonique de M par rapport à P' et P" (conditions d'existence).
b) On suppose, dans cette question que $m = 1$.
1. M décrit $y'y$. Quel est l'ensemble des points N?
2. M décrit la droite d'équation $x + y = 2$. Quel est l'ensemble des points N?
On le déterminera par son équation, puis on effectuera le changement de base défini par

$$\vec{I} = \vec{i} - \vec{j}, \qquad \vec{J} = \vec{i} + \vec{j}.$$

c) On suppose, dans cette question, que m varie dans $\mathbb{R}$.
1. M est en A (1, 0). Quel est l'ensemble des points N?
2. M est en B (2, 2). Quel est l'ensemble des points N?
3. M a pour coordonnées (x_0, y_0) *fixes*. Démontrer que l'ensemble des points N est une droite ou un sous-ensemble de droite

8.59** Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La notation M (x, y) désigne le point M d'abscisse x et d'ordonnée y. On utilisera les points E (+ 1, 0) et E' (− 1, 0).
a) Étant donné un point M du plan, on appelle M_1 son transformé dans la symétrie orthogonale d'axe $y'Oy$. Former la relation entre x et y qui équivaut à la nullité du produit scalaire $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{M_1E}$. Montrer que l'ensemble des points M qui satisfont à cette condition est l'hyperbole équilatère H d'asymptotes les bissectrices des axes et passant par E et E' (on pourra effectuer un changement de repère : on prendra pour nouveau repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, $\vec{I}$ et $\vec{J}$ désignant des vecteurs unitaires portés par les bissectrices des axes $x'x$, $y'y$).

b) Étant donné deux points M (x, y) et M' (x', y') de H, distincts ou non, on définit le point S (X, Y) par :

$$\begin{cases} X = xx' + yy' \\ Y \quad xy \;\; - \; yx' \end{cases}$$

On dit que S est le « *produit* » de M par M' et l'on pose

$$S = M \star M'.$$

On établira alors les propriétés suivantes :
1. S appartient à H;
2. on a $M \star M' = M' \star M$;
3. étant donné un troisième point quelconque, M" $(x", y")$ de H on a
$$(M \star M') \star M" = M \star (M' \star M").$$

Puis on calculera $M \star E$ et l'on montrera que, pour tout point M (x, y) de H, il existe un point $\overline{M}$ de H, que l'on précisera, tel que $M \star \overline{M} = E$. [En résumé, le « produit » noté $\star$ munit H d'une structure de groupe commutatif.]
c) Étant donné deux points distincts, M et M', de H, on pose $S = M \star M'$. Vérifier que S est le point de H tel que les cordes ES et MM' soient parallèles. Que devient ce résultat quand M' tend vers M ? Trouver la propriété de la corde MM' qui équivaut à S = E'. Donner une propriété équivalente faisant intervenir le produit scalaire $\overrightarrow{ME} . \overrightarrow{M'E}$.
d) 1. Soit AB et CD deux cordes rectangulaires de H. On pose : $A \star B = P$ et $C \star D = Q$. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{PE}$ et $\overrightarrow{QE}$? Déduire de ceci que le produit $A \star B \star C \star D$ est égal à E'. Déduire alors du *b)* que les cordes AC et BD sont rectangulaires, ainsi que les cordes AD et BC.
2. Soit AB et AC deux cordes rectangulaires de H. Calculer le « produit » $A \star A \star B \star C$. Que peut-on dire de la tangente en A à H ? Montrer que le cercle de diamètre BC recoupe H au point A' symétrique de A par rapport à 0.
3. On fixe un point A de H. On considère deux cordes, AB et AC, de H qui varient en restant rectangulaires. Que peut-on dire de la droite BC ?

(D'après Bacc. M.E. Paris 1967.)

8.60 On considère l'équation

$$E_{(x,y)} \quad (x \quad 1)t^2 \quad 2t \quad y \quad 2 \quad 0$$

où t représente l'inconnue réelle et x, y deux paramètres réels. A chaque équation $E_{(x,y)}$ on associe le point M (x, y) d'un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Discuter, suivant la position du point M dans P l'existence et le signe des racines de l'équation $E_{(x,y)}$. [On appellera C la courbe intervenant dans la discussion de l'existence des racines.]
b) Quel est l'ensemble Γ_{t_0} des points M pour lesquels t_0, valeur réelle donnée, est racine de $E_{(x,y)}$? Étudier la position relative de Γ_{t_0} et C.
c) En déduire les équations des tangentes issues de A (− 2, 0) à la courbe C.

8.61 On considère l'équation

$$E_{(x,y)} \quad (2x \quad 3)t^2 \quad 4t \quad y \quad 1 \quad 0$$

où t représente l'inconnue réelle et x, y deux paramètres réels. A chaque équation $E_{(x,y)}$ on associe le point M (x, y) d'un plan P rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Discuter, suivant la position de M dans P l'existence et le signe des racines de l'équation $E_{(x,y)}$.
b) Quel est l'ensemble des points M de P tels que, si l'on appelle t' et $t"$ les racines de $E_{(x,y)}$, on ait :

$$\frac{1}{2} \quad t' \quad 1 \quad t"?$$

c) Quel est l'ensemble des points M de P tels que l'on ait :

$$-\frac{1}{2} < t' < t" < 2?$$

8.62 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ et sa courbe représentative C dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $x'x$ la droite $(O, \vec{i})$ et $y'y$ la droite $(O, \vec{j})$. On définit une application φ de $D = x'x - \{0\}$ dans $D' = y'y - \{0\}$ de la façon suivante : à tout point M de $D = x'x - \{0\}$ on associe le point M_1 de C ayant même abscisse que M; à ce point M_1 on associe le point M' de D' ayant même ordonnée que M_1; on pose $M' = \varphi(M)$.
a) Soit P, Q, R trois points de D tels que R soit le milieu de [P, Q]; on pose $P' = \varphi(P)$, $Q' = \varphi(Q)$, $R' = \varphi(R)$. Démontrer que (O, R', P', Q') est une division harmonique.
b) Soit P, Q, R trois points de D tels que (P, Q, R, O) soit une division harmonique. Quelle propriété vérifient les trois points $P' = \varphi(P)$, $Q' = \varphi(Q)$, $R' = \varphi(R)$?
c) Soit P, Q, R, S quatre points de D tels que (P, Q, R, S) soit une division harmonique. Démontrer que (P', Q', R', S') est une division harmonique.

d) Soit P, Q, R, S quatre points de D tels que $\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} \quad \frac{\overline{SP}}{\overline{SQ}} = k$. $(k \in \mathbb{R}^*)$.

Calculer $\frac{\overline{RP'}}{\overline{RQ'}} \quad \frac{\overline{SP'}}{\overline{SQ'}}$

8.63* Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x + 3}{x - 2}$

a) Étudier f et construire sa courbe représentative C dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
b) Soit $x'x$ la droite $(O, \vec{i})$, $y'y$ la droite $(O, \vec{j})$. On définit une application φ de $D = x'x - \{2\}$ dans $D' = y'y - \{4\}$ de la façon suivante. A tout point M de D on associe le point M_1 de C ayant même abscisse que M; à ce point M_1 on associe le point M' de D' qui a même ordonnée que M_1, on pose $M' = \varphi(M)$.
1. Soit le point A (2, 0) et trois points P, Q, R de D tels que : (P, Q, R, A) forment une division harmonique. Quelle propriété vérifient les points $P' = \varphi(P)$, $Q' = \varphi(Q)$, $R' = \varphi(R)$?
2. Soit trois points P, Q, R de D tels que R soit le milieu de [P, Q]. Démontrer qu'il existe un point fixe B de $y'y$ tel que (P', Q', R', B) soit une division harmonique.
3. Si (P, Q, R, S) est une division harmonique de D, démontrer que (P', Q', R', S') est aussi une division harmonique de D'.

8.64 Soit les fonctions f_m définies par $f_m(x) = \frac{(m + 1)x - 3}{(1 - m)x - 2}$.

a) Quel est le sens de variation de f_m, suivant les valeurs réelles de m ?
b) On appelle C_m la courbe représentative de f_m. Soit D la droite d'équation $y - x = 0$. Lorsqu'ils existent, les points d'intersection de D et C_m sont appelés M' et M". Quelle particularité présente la figure lorsque m varie ?
c) Démontrer que C_m passe par des points fixes lorsque m varie. Les déterminer.
d) Chaque courbe C_m admet un centre de symétrie S_m. Quel est l'ensemble des points S_m lorsque m varie ?
e) Combien passe-t-il de courbes C_m par un point donné $M_0(x_0, y_0)$ du plan ? Discuter.

8.65 Soit les fonctions f_m définies par $f_m(x) = \frac{mx - 2 - m}{x - 3m + 1}$.

a) Quel est le sens de variation de f_m, suivant les valeurs réelles de m ?
b) Soit C_m la courbe représentative de f_m. Soit D la droite d'équation $y - x = 0$. Lorsqu'ils existent, les points d'intersection de D et C_m sont appelés M' et M". Démontrer qu'il existe deux points fixes A et B de D tels que (A, B, M', M") soit une division harmonique, quel que soit m.
c) Démontrer que C_m passe par des points fixes lorsque m varie. Déterminer ces points.
d) Chaque courbe C_m admet un centre de symétrie S_m. Quel est l'ensemble des points S_m lorsque m varie ?

Résoudre les équations suivantes (ex. 66 à 72).

8.66 $\frac{|x+2|}{x-3} = -\frac{1}{2}$

8.67 $\frac{x+2}{|x \quad 3|} = -\frac{1}{2}$.

8.68 $\left|\frac{x+2}{x \quad 3}\right| = 2.$

8.69 $\frac{|x+2|}{|x \quad 3|} = 2.$

8.70 $\frac{|x|+2}{x \quad 3} \quad \frac{4}{5}$

8.71 $\frac{|2x \quad 1| \quad |2 \quad x|}{x \quad 3} \quad 2$

8.72 $\frac{|3+x| - |x-1|}{|2x \quad 1|}. \quad 1$

Résoudre graphiquement les systèmes suivants (ex. 73 à 78).

8.73 $\begin{cases} 2xy - x + 3y + 4 \leqslant 0, \\ 2x - 3y + 1 > 0. \end{cases}$

8.74 $\begin{cases} xy - 3x + 4y - 1 > 0, \\ x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$

8.75 $\begin{cases} xy - 2x - y + 1 < 0, \\ y \quad x^2 \quad 0 \end{cases}$

8.76 $\begin{cases} xy > 0, \\ y \quad x^2 + x \quad 1 \quad 0 \end{cases}$

8.77 $\begin{cases} xy + 2x - y - 4 > 0, \\ x - y - 3 < 0, \\ y - x^2 + 2x + 3 = 0. \end{cases}$

8.78 $\begin{cases} xy - 2y - x + 4 \leqslant 0, \\ x \quad 2y \quad 2 \quad 0, \\ xy + x \quad y \quad 0. \end{cases}$

Résoudre graphiquement les inéquations suivantes (ex. 79 à 82).

8.79 $(2y + x - xy - 4)(y + x^2) < 0.$

8.80 $(2xy - 4y - x + 8)(3y + x^2 - 9)(y + x - 1) > 0.$

8.81 $(xy - 4)(2x - 2y + xy + 2) \leqslant 0$

8.82 $(xy \quad x \quad 2y \quad 3)(y \quad 2x^2 \quad 3) \quad 0.$

Exercices sur les fonctions f telles que $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ $(a' \neq 0)$

Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes; on trouvera toutes les formes possibles de courbe (ex. 83 à 89)

8.83 $f(x) \quad \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - x + 3}.$

8.84 $f(x) = \frac{x^2 \quad 2x}{(x \quad 1)^2}$

8.85 $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{(x+1)^2}.$

8.86 $f(x) \quad \frac{x^2 \quad 2x}{x^2 \quad x \quad 6}.$

8.87 $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 5x + 6}.$

8.88 $f(x) = \frac{3x}{-x^2 + 4}$

8.89 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}.$

Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes (ex. 90 à 97).

8.90 $f(x) \quad \frac{x^3 + 4}{x^2 \quad 2x}$

8.91 $f(x) \quad \frac{2x^2 \quad x + 3}{x^2 \quad 2x \quad 3}.$

8.92 $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 3x - 4}.$

8.93 $f(x) = \frac{4x^2 \quad 1}{x^2 - 7x + 12}.$

8.94 $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 \quad 4x + 3}.$

8.95 $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 2}.$

8.96 $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 \quad x - 6}$

8.97 $f(x) = \frac{2x}{x^2 \quad 2}.$

8.98 *a*) Trouver la courbe représentative C de la fonction $x \longmapsto \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

b) Quel est l'ensemble C′ des points M (x, y) vérifiant

$(x^2 + 2x \quad 3)y \quad (x^2 \quad x \quad 2) \quad 0?$

8.99 Mêmes questions qu'à l'exercice 98 pour la fonction $x \longmapsto \frac{x-3}{x^2 - x - 6}$

8.100 Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) \quad \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 \quad 1}$$

Résoudre l'équation $f(x) = 3$.

8.101 Déterminer les coefficients a, b, c, b', c' de telle sorte que la courbe représentative C de la fonction f définie par $x \longmapsto f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + b'x + c'}$ admette pour asymptotes les droites d'équations : $x = 1$, $x = -2$, $y = 2$ et passe par les points A $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ et B $\left(2, \frac{9}{4}\right)$. Étudier la fonction ainsi déterminée et construire C.

8.102 Même question qu'à l'exercice 101 avec les asymptotes $x = 3$, $x = -4$, $y = 3$ et les points A $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{45}\right)$, B $\left(-1, \frac{-1}{12}\right)$

8.103 *a*) Soit f la fonction qui à tout nombre réel x associe

$$f(x) \quad \frac{2x + 1}{x^2 \quad x + 1}$$

Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que C admet trois points d'inflexion alignés.

b) Soit g la fonction définie pour tout x réel par

$$g(x) \quad \frac{|(x \quad 1)(2x \quad 1)|}{(x \quad 1)(x^2 \quad x + 1)} \quad \text{si} \quad x \neq 1,$$

et

$$g(1) \quad 1$$

La fonction g est-elle continue pour $x = 1$; pour $x = \quad \frac{1}{2}$?

La fonction g est-elle dérivable pour $x = -\frac{1}{2}$?

Comment peut-on déduire le graphique C′ de la fonction g du graphique C de la fonction f?

(D'après Bacc. Math. Elem. Rennes 1967.)

8.104 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x^2 - 3x}$.

a) Étudier f et construire sa courbe représentative C.

b) Déterminer le point d'intersection A de la courbe avec l'asymptote parallèle à l'axe $x'x$. Écrire l'équation d'une droite D de coefficient directeur k passant par ce point. Quel est l'ensemble des milieux des segments dont les extrémités sont les points d'intersection de D et C, autres que A, lorsqu'ils existent? On appellera M′ et M″ ces points.

c) Quel est l'ensemble des conjugués harmoniques de A par rapport à M′ et M″ lorsque k prend toutes les valeurs possibles?

8.105 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - x + 3}$.

a) Étudier f et construire sa courbe représentative C.
b) Déterminer le point d'intersection A de C avec son asymptote parallèle à $x'x$. Une droite de coefficient directeur k passe par ce point et, pour certaines valeurs de k, coupe C en deux points M′ et M″, en général, distincts de A. Quel est l'ensemble des points I, milieux de [M′, M″] lorsque k prend toutes les valeurs possibles ?
c) Quel est l'ensemble des conjugués harmoniques de A par rapport à M′ et M″ lorsqu'ils existent ?
d) Pour certaines valeurs de h, que l'on indiquera, la droite d'équation $y = h$ coupe C en deux points P′ et P″. Ces points se projettent sur $x'x$, parallèlement à $y'y$ en p' et p''.
Les images M_1 et M_2 des extremums se projettent sur $x'x$ en m_1 et m_2. Démontrer que (m_1, m_2, p', p'') est une division harmonique.

8.106 Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy.
On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{6x(x - t)}{x^2 + 9}$; t est un réel strictement positif.

a) Montrer que, quel que soit t, cette fonction passe par un maximum et par un minimum pour deux valeurs distinctes, x_1 et x_2, qu'on ne demande pas de calculer.
b) Étudier la variation de la fonction f correspondant à $t = 4$. Tracer la courbe représentative C de cette fonction. On précisera les intersections de la courbe avec Ox et avec l'asymptote. Déterminer la tangente en O à C.
c) Soit D la droite d'équation $y = mx$. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points communs à D et à C. En déduire l'existence de trois tangentes à C passant par O. Donner leurs équations. Déterminer les points de contact de ces tangentes et de C.

(Bacc. Math et Technique. Toulouse 1969.)

8.107 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + x + 1}$

a) Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative C.
b) Déterminer les équations des tangentes à C issues de O ainsi que les abscisses des points de contact de ces tangentes avec C.
Étudier la position de C par rapport à sa tangente en O.
c) Pour certaines valeurs de k que l'on précisera, la droite Δ_k, d'équation $y = k$, coupe C en deux points N′ et N″ qui se projettent sur $x'x$ parallèlement à $y'y$ en n' et n''. Démontrer qu'il existe deux points fixes A et B de $x'x$ tels que (A, B, n', n'') soit une division harmonique. Examiner le cas où $k = 1$. Interpréter.

8.108** Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$

a) Étudier ses variations et construire sa courbe représentative C dans un repère orthonormé. On désignera par A le point de C d'abscisse 2.
b) Soit un point M (distinct de A) de C, d'abscisse λ. Déterminer l'abscisse du point T où la tangente en M à C recoupe C.
c) Soit deux points distincts, M_1 et M_2, de C, d'abscisses respectives x_1 et x_2 (on supposera $x_1x_2 \neq x_1 + x_2$). Déterminer l'abscisse p du point P, de C où la droite M_1M_2 recoupe C (Il suffit d'écrire que les coefficients directeurs de PM_1 et PM_2 sont égaux.)
Que peut-on dire de la droite M_1M_2 si $x_1x_2 = x_1 + x_2$?
En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que trois points (deux à deux distincts), M_1, M_2, M_3 de C, d'abscisses respectives x_1, x_2, x_3 soient alignés est

(1) $$x_1x_2x_3 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3.$$

Montrer que si, dans la relation (1), on pose

$$x_1 = x_2 = \lambda \quad (\lambda \neq 2),$$

la valeur obtenue pour x_3 est la même que l'abscisse du point T de la question *b*.
d) Montrer que, si trois points, M_1, M_2, M_3 de C (distincts de A) sont alignés, les points T_1, T_2, T_3 où les tangentes en ces points recoupent C sont également alignés.
e) Montrer qu'il existe un seul nombre réel, s, *non nul*, tel que la relation (1) soit vérifiée lorsque l'on pose $x_1 = x_2 = x_3 = s$.
Donner l'équation de la tangente D, à la courbe C au point S de C d'abscisse s.
Vérifier que les points de C d'abscisse supérieure à celle de S sont situés dans un même demi-plan limité par D, et que les points de C d'abscisse inférieure à celle de S sont situés dans l'autre demi-plan.

(Bacc. Math Elem. Toulouse 1969.)

8.109* Soit les fonctions f_m définies par : $f_m(x) = \frac{mx^2 + 2x - m + 1}{x^2 - 3x}$ et C_m leurs courbes représentatives.

a) Étudier, suivant les valeurs de m, le sens de variation de f_m.
b) Démontrer que les courbes C_m passent par des points fixes lorsque m varie.
c) Construire les courbes C_m pour $m \in \left\{-\frac{2}{3}, -1, 0, 2, -\frac{7}{8}, 1\right\}$
d) On considère la droite D d'équation $y = -1$. Pour certaines valeurs de m, que l'on précisera, elle coupe C_m en deux points M′ et M″. Démontrer qu'il existe deux points fixes A et B conjugués harmoniques de M′ et M″ lorsque m varie.

8.110 *a)* Étudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$.
b) La courbe C coupe l'une de ses asymptotes au point A. La droite OA recoupe C au point B. Trouver les coordonnées des points A et B et écrire les équations des tangentes à C en ces deux points.
c) Une droite, d'équation $y = mx$, coupe la courbe C au point O et la recoupe, en général, en deux points distincts, M′ et M″.
Former l'équation qui donne les abscisses de ces deux points et déterminer m pour que le point O soit le milieu du segment [M′, M″]. Calculer les coordonnées des points M′ et M″ qui correspondent à la valeur de m ainsi trouvée et déterminer les équations des tangentes à la courbe C en ces deux points.

(Bacc. D. 1968. Algérie.)

8.111 On considère la fonction f qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre réel

$$y = f_\alpha(x) = \frac{(1 - x^2)\cos 2\alpha + 2x \sin 2\alpha}{1 + x^2}$$

où α désigne un paramètre satisfaisant à $0 \leqslant \alpha < \pi$.
a) Étudier le sens des variations de cette fonction pour $\alpha = 0$ et construire la courbe représentative dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
b) 1. On choisit α tel que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$. Écrire $f_\alpha(x)$ dans ce cas particulier ; étudier ses variations et tracer sa courbe représentative, Γ, dans le même repère orthonormé.
2. Comment faut-il choisir h pour qu'une parallèle à l'axe $x'Ox$, d'équation $y = h$, coupe la courbe Γ en deux points distincts, M et N, dont les projections orthogonales sur $x'Ox$ sont notées respectivement M′ et N′.
Démontrer que, lorsque h varie dans les limites permises, les points M′ et N′ restent conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes, que l'on déterminera.
3. Déterminer et construire, dans le repère précédent, l'ensemble des milieux, I, des segments [M, N], lorsque h varie.
c) Démontrer que, quel que soit α ($0 \leqslant \alpha < \pi$) et quel que soit x, on a $|y| \leqslant 1$.

(Bacc. Math. Elem. 1967. Nantes.)

Discuter graphiquement les équations suivantes. (On pourra également discuter le signe des racines) (ex 112 à 116).

8.112 $x^2(m \quad 1) + x(4m \quad 9) + 5(m - 3) \quad 0.$

8.113 $(4 + m)x^2 + 8x + 6 - m = 0.$

8.114 $x^2(m - 1) - 2x(2m + 1) + 4m - 1 = 0.$

8.115 $x^2(2m \quad 1) \quad x(5m \quad 1) \quad 2m \quad 1 = 0$

8.116 $(m \quad 1)x^2 \quad 2(m \quad 1)x \quad 1 = 0$

8.117* Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{A}{x \quad a} + \frac{B}{x \quad b}$ où A, B, a, b désignent des nombres réels ($a \neq b$).
a) A quelle condition g admet-elle un maximum et un minimum?
b) Démontrer que la courbe représentative Γ de g admet toujours un point d'inflexion unique.
c) Démontrer que toute fonction f définie par $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(x \quad a)(x \quad b)}$ avec $a \neq b$ est telle que quel que soit x, distinct de a et b, on ait

$$f(x) \quad \frac{A}{x \quad a} + \frac{B}{x \quad b} + C,$$

A, B, C étant trois nombres réels que l'on calculera en fonction de α, β, γ, a et b
Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ à l'aide de cette forme de $f(x)$. En déduire que f a toujours un point d'inflexion unique.

Exercices sur les fonctions $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ $(a' \neq 0)$.

Étudier les fonctions suivantes et construire leur courbe représentative (ex. 118 à 122).

8.118 $f(x) \quad \frac{3x^2 \quad 2x + 2}{x}$

8.119 $f(x) \quad \frac{x^2 + 5x \quad 4}{2x}$

8.120 $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x}$, $g(x) = |x - 1| + \frac{4}{x}$

8.121 $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x}$, $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{|x|}$.

8.122. $f(x) = \frac{x^2 - 9x + 18}{x - 2}$.

Étudier les fonctions suivantes et construire leur courbe représentative. Indiquer l'équation de leur tangente au point d'abscisse x_0 (ex 123 à 126)

8.123 $f(x) = \frac{x^2 - 2x \quad 8}{x \quad 1}$, $g(x) \quad \left|\frac{x^2 \quad 2x \quad 8}{x \quad 1}\right|$

8.124 $f(x) \quad \frac{x^2 \quad 3x \quad 2}{x}$, $g(x) \quad \frac{x^2 + 3x + 2}{x}$

8.125 $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{x + 3}$, $g(x) = \frac{x^2 + |5x + 2|}{|x + 3|}$.

8.126 $f(x) = \frac{x^2 \quad 3x + 1}{x + 1}$

8.127 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x(x - 1)}{2x - 1}$.
a) Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative C.
b) Écrire les équations de ses tangentes aux points d'intersection de C et de l'axe $x'x$.
c) Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction g définie par

$$g(x) \quad \left|\frac{2x(x \quad 1)}{2x \quad 1}\right|$$

8.128 La fonction f est définie par $f(x) \quad \frac{2x(x \quad 1)}{2x \quad}$
a) Étudier la variation de f et construire sa courbe représentative C.
b) Une droite D_m de coefficient directeur m passe par le point A $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre d'éléments de $D_m \cap C$.
Utiliser le graphique pour discuter, suivant les valeurs de m le nombre de racines de l'équation

$$4(m - 1)\sin^2 u + 4(m - 1)\cos u + 5m - 4 = 0.$$

8.129 On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1 + \frac{3}{x}$
a) Étudier la variation de f et construire sa courbe représentative C.
b) En déduire, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de racines de l'équation

$$2x^2 + x(1 - m) + 3 = 0$$

et leur place par rapport aux nombres -3, 0 et $+3$.

8.130 On considère la fonction f_a définie par $f_a(x) = 2x - a + \frac{8 - 2a^2}{x - 2a}$ dans laquelle a est un nombre réel différent de $+2$ et de -2.
a) Pour quelles valeurs de a la fonction précédente a-t-elle constamment le même sens de variation? Quel est ce sens? Pour quelles valeurs de a la fonction admet-elle un maximum et un minimum?
b) On considère la famille des courbes C_a qui représentent les fonctions obtenues en remplaçant a par les différentes valeurs possibles.
1° Montrer que ces courbes admettent un centre de symétrie, dont on donnera les coordonnées. Déterminer l'ensemble de ces centres de symétrie.
2° Montrer que les courbes C_a passent par deux points fixes, M et N, dont on déterminera les coordonnées.
c) Soit la fonction f: $x \longmapsto f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x}$.
1° Sa courbe représentative appartient-elle à la famille des courbes C_a précédemment étudiée? Si oui, quelle est alors la valeur de a correspondante? Construire cette courbe C.
2° Utiliser C pour discuter l'existence et le signe des racines de l'équation

$$2x^2 \quad kx \quad 8 \quad 0,$$

puis placer ces racines par rapport aux nombres $-\frac{4}{3}$ et 4.

(Bacc. Math. et Technique. Poitiers 1967.)

8.131 *a)* Déterminer les coefficients a, b, c pour que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ coupe l'axe $x'x$ aux points A et B d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$ et 1 et admette en B une tangente de coefficient directeur 1
b) Étudier les variations de la fonction définie par la relation $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$ et tracer sa courbe représentative C dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de t, l'existence et le signe des racines de l'équation

$$2x^2 \quad (t \quad 3)x \quad 1 \quad 0$$

(Bacc. T et E. Caen. 1967.)

8.132 *a*) Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 \quad 3x \quad 2}{x + 2}.$$

b) Discuter, graphiquement et par le calcul, le nombre de racines de l'équation

$$x^2 \quad (m \quad 3)x \quad 2 \quad 2m \quad 0$$

8.133 On considère la fonction f qui, à x réel, fait correspondre $y = f(x) \quad \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x + 3}$.
Soit C la courbe qui représente la variation de f dans un repère orthonormé $(x'Ox, y'Oy)$.
a) Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x \quad 3}.$$

En déduire que la courbe C admet une asymptote oblique, donner l'équation de cette asymptote
Montrer que le point I, intersection des deux asymptotes de la courbe C, est centre de symétrie pour cette courbe
b) Tracer la courbe C.
c) Utiliser le graphique pour discuter l'équation

$$2x^2 \quad 2(2 \quad p)x \quad 3p \quad 2 \quad 0,$$

p étant un paramètre réel
d) Donner l'équation de la tangente à la courbe C en son point A d'abscisse + 3 Tracer cette tangente. Quelle est l'ordonnée du point de cette tangente dont l'abscisse est $-\frac{3}{2}$?
e) On considère une droite variable D, de coefficient directeur m, passant par le point fixe B de coordonnées

$$x \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{20}{9}$$

Étudier, sur le graphique, suivant les valeurs de m, le nombre de points communs à D et à C
Quelle est l'équation qui permet de trouver les abscisses de ces points? Retrouver par le calcul les résultats de la discussion précédente

(Bacc B, 1968. Madagascar.)

8.134 Déterminer les coefficients a, b, c réels de telle sorte que la courbe représentative C de la fonction f définie par $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ admette pour asymptote la droite D : $y = 2x + 1$ et passe par le point A (3, 4) Construire C.

8.135 Même question qu'à l'exercice 134 avec D : $2x - 3y + 4 \quad 0$ et A (− 2, + 3)

8 136 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{2} + b + \frac{c}{x}$, où b et c sont des paramètres réels.
a) Calculer b et c pour que $f(-1) \quad 0$ et $f'(2) \quad 0$.
b) Construire la courbe représentative C de f

8.137 Soit la fonction f définie par $f(x) \quad \frac{x^2 + bx + c}{dx - 1}$
a) Déterminer b, c, d pour que cette fonction présente un maximum égal à 6 pour $x = -1$ et qu'en outre la courbe représentative admette pour asymptote la droite d'équation $x = 1$.
b) Étudier les variations de la fonction f: $x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x \quad 1}$.

(D'après Bacc. T.E. Montpellier 1967.)

8.138 A toute valeur d'un paramètre k on associe la fonction de la variable réelle x, définie, pour $x \neq 3$, par $f(x) = \frac{-x^2 + kx + 5}{x - 3}$
a) Comment faut-il choisir k pour que la fonction associée n'admette ni maximum relatif, ni minimum relatif?
b) Déterminer k pour que la tangente à la courbe représentative de la fonction en son point d'abscisse 2 soit parallèle à la droite d'équation $3x - y + 7 = 0$.

8.139 Soit l'équation du second degré de la variable réelle t

$(E_{x,y}) \quad (x \quad 1)t^2 \quad 2t \quad y \quad x \quad 3 \quad 0$

où x et y désignent deux paramètres réels.
A chaque équation $(E_{x,y})$, on associe un point M (x, y) d'un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Discuter, suivant la position de M dans P l'existence et le signe des racines de $(E_{x,y})$.
b) Quel est l'ensemble des points M tels que, si t' et t'' désignent les racines de $(E_{x,y})$ on ait $1 \quad t' \quad 2 \quad t''$
c) Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$2 \quad t' \quad t'' \quad 1$$

d) Déterminer l'équation de l'ensemble des points M tels que t_0, valeur réelle donnée, soit racine de l'équation $(E_{x,y})$. Étudier la position de cet ensemble par rapport à la courbe intervenant dans la discussion du *a*).

8.140 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ et sa courbe représentative C.
a) On considère la droite D_m d'équation $y = mx + 3$. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre d'éléments de $C \cap D_m$. On appelle M' et M" les éléments de cet ensemble, s'ils existent.
b) Étudier la variation du produit scalaire $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM''}$ lorsque m varie. En déduire m pour que $\widehat{M'OM''}$ soit un angle droit.

8.141 Soient les fonctions f_m définies par : $f_m(x) = (m - 1)x^2 + x - 4m$.
a) Démontrer que les courbes représentatives C_m des fonctions f_m passent par des points fixes lorsque m varie.
b) Pour une valeur de x, la fonction f_m passe, en général, par un extremum Soit S_m le point représentatif de cet extremum sur C_m. Quel est l'ensemble des points S_m lorsque m prend toutes les valeurs possibles? La courbe obtenue a deux branches.
A quels sous-ensembles de l'ensemble des courbes C_m peut-on associer chacune de ces branches?

8.142** Soit P la parabole d'équation $y = x^2$.
Par un point $M_0(x_0, y_0)$, on fait passer une droite D de coefficient directeur m On appelle M' et M" les points d'intersection, s'ils existent, de D et P, et N le conjugué harmonique de M_0 par rapport à M' et M".
a) Calculer les coordonnées de N en fonction de x_0, y_0 et m. N est-il toujours défini?
b) On suppose que D reste parallèle à elle-même, son coefficient directeur prenant la valeur + 1.
1° Quel est l'ensemble des points N lorsque M_0 décrit l'axe $x'x$?
2° Quel est l'ensemble des points N lorsque M_0 décrit l'axe $y'y$?
3° Quel est l'ensemble des points N lorsque M_0 décrit la droite Δ d'équation $y = -\frac{1}{4}$?
c) On suppose maintenant que $M_0(x_0, y_0)$ est fixe et que le coefficient directeur m de D varie. Quel est l'ensemble des points N lorsque M_0 est confondu :
1° avec le point A $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 2° avec le point B (1, 0). 3° avec le point C (1, 2)
Démontrer qu'en général, N décrit une droite ou un segment de droite.

8.143 Soit les fonctions f_m définies par $f_m(x) = (2m - 1)x^2 - mx - m + 2$.
a) Étudier le sens de variation de f_m suivant les valeurs réelles de m.
b) Quel est l'ensemble des points représentatifs des extremums de f_m, dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, quand m prend toutes les valeurs possibles ?
c) Écrire l'équation des tangentes aux courbes C_m représentant f_m aux points d'abscisse -1. Démontrer qu'elles sont concourantes.
d) Existe-t-il une valeur x_0 de l'abscisse pour laquelle les tangentes à C_m sont parallèles entre elles ?
On illustrera les différentes questions en construisant C_m pour

$$m \in \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}.$$

8.144* Soit les fonctions f_m définies par $f_m(x) = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$ où m désigne un paramètre réel, *non nul*. On désigne par C_m la courbe représentative de f_m par rapport à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Pour quelles valeurs de m la fonction f_m admet-elle un maximum relatif ? Construire C_1 et $C_{\frac{1}{2}}$.
Montrer que les courbes C_m passent par trois points fixes.
b) Soit $y = kx$ l'équation d'une droite D_k passant par O. Établir l'équation dont les racines sont les abscisses des points d'intersection de C_m et de D_k. Comment doit-on choisir m pour que toutes les droites D_k coupent C_m ?

(D'après Bacc. C, Aix-Marseille. 1967.)

8.145 On considère la fonction f qui, à tout nombre réel x de l'intervalle $I = [+2, +6]$ associe le nombre $y = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x - 1}$.
Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}, définie sur un intervalle J, que l'on précisera. Quel est le sens de variation de la fonction f^{-1} sur l'intervalle J ?
Déterminer la relation qui permet de calculer l'image d'un nombre quelconque de l'intervalle J par la fonction f^{-1}.

8.146 Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = \frac{x^2 + 5x + m}{x}$ où m est un paramètre réel ***non nul*** et x une variable réelle *non nulle*. On désigne par C_m la courbe représentative de cette fonction, en repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Pour $m = 4$, étudier les variations de f_4 et construire C_4.
b) m n'étant plus fixé à 4, déterminer pour quelles valeurs de m la fonction f_m est monotone dans les intervalles où elle est définie.
Pour quelles valeurs de m la fonction f_m admet-elle un maximum et un minimum ? Calculer, en fonction de m les coordonnées des points correspondants de C_m et déterminer l'ensemble de ces points lorsque m varie.
c) m étant encore quelconque, soit A_m le point où C_m rencontre la droite d'équation $x = 4$ et soit T_m la tangente en A_m à C_m. Former l'équation de T_m et montrer que T_m coupe la droite d'équation $y = x + 5$ en un point B, indépendant de m, que l'on précisera.

(Bacc. T et E, Reims. 1967.)

8.147* *a*) Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction f_1 définie par

(1) $$f_1(x) = \frac{3 - x}{x}.$$

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est supposé orthonormé et la courbe est appelée C_1.
b) Soient A et B les points de C_1 d'abscisses respectives 1 et 3 ; déterminer l'équation de la droite AB. Trouver les équations des tangentes à C_1 qui sont parallèles à AB.
c) Une parallèle à l'axe $y'y$ coupe C_1 en M et la droite AB en N. Soit P le milieu de [M, N] ; montrer qu'il existe entre les coordonnées de P une relation qui peut s'écrire

(2) $$y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x}.$$

d) Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction de x définie par la relation (2). (On appellera C_2 la courbe obtenue et on la représentera dans le même repère que C_1.)
e) Déterminer les coordonnées du point P de C_2, distinct de A, tel que le triangle AMN correspondant soit isocèle, les côtés isométriques étant AM et AN. Quelle autre particularité ce triangle possède-t-il ?

(Bacc. T et E, Lille. 1967.)

Étude de fonctions rationnelles.

8.148 On considère la fonction réelle f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$.
a) Étudier les variations de f.
b) Soit C sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit D la droite d'équation $y = x + 3$.
Étudier la position relative de D et C.
Tracer C.

8.149 Soit la fonction f définie par $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x^2}$.
Étudier la variation de cette fonction et construire sa courbe représentative C.

8.150 *a*) Étudier la variation et construire la courbe représentative C de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}.$$

b) Soit M un point quelconque d'abscisse m, de C. Quelle est l'équation de la tangente en M à C ? Exprimer, en fonction de m les coordonnées du point T, où cette tangente coupe l'asymptote D parallèle à Oy.
c) Soit T un point de D, d'ordonnée l, fixe. Trouver le nombre de tangentes qu'on peut mener de T à la courbe C. Discussion.
d) D'un point A(−1, [illegible]), on mène deux tangentes à C. Calculer le coefficient directeur de la droite joignant les points de contact.

(D'après Bacc. T et E, Dakar. 1967.)

8.151 Étudier et construire la courbe représentative de f définie par

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^3}.$$

8.152 Étudier et construire la courbe représentative de f définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{(x + 1)^2}.$$

Étudier les fonctions suivantes et les représenter graphiquement par une courbe C. Comparer la position de C et de la courbe Γ (ex. 153 à 156).

8.153 $f(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{4x}$, $\Gamma : y = x^2 + 1.$

8.154 $f(x) = 2x^2 + 1 - \frac{1}{x^2}$, $\Gamma : y = 2x^2 + 1.$

8.155 $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 + \frac{8}{x^2}$, $\Gamma : y = \frac{x^2}{2} + 1$

8.156 $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{9}{4x}$, $\Gamma : y = \frac{x^2}{3}$

8.157** Soit les fonctions f_m définies par $f_m(x) = 2mx^4 - x^2 - 4m + 1$.

a) Démontrer que, lorsque m varie, les courbes représentatives C_m des fonctions f_m passent par des points fixes.

b) Quel est le sens de variation de f_m suivant les valeurs de m ?

c) Quand f_m possède des extremums dont les abscisses sont non nulles, quel est l'ensemble des points représentatifs sur les courbes correspondantes ?

8.158** Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = (m - 1)x^3 + x^2 - m$.

a) Étudier le sens de variation de f_m, suivant les valeurs de m. La courbe représentative dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'appelle C_m.

b) Démontrer que C_m passe par un point fixe lorsque m varie

c) Quel est l'ensemble des points représentatifs des extremums des fonctions f_m d'abscisse non nulle, lorsque m varie ?

d) Quel est l'ensemble des points d'inflexion des courbes C_m lorsque m varie ?



Equations et inéquations

Dans les chapitres précédents l'étude des variations des fonctions polynômes ou rationnelles et la construction de leurs courbes représentatives nous a permis de discuter graphiquement certaines équations ou inéquations et certains systèmes
Dans la section I de ce chapitre nous donnons des exemples d'équations $f(x) = 0$ et d'inéquations $f(x) \leqslant 0$ où f désigne une fonction qui n'est pas une fonction rationnelle ; de telles équations ou inéquations sont appelées **irrationnelles.**
Dans la section II nous donnons d'abord des exemples de résolution de **systèmes symétriques** *en x et y, puis des exemples de résolution de systèmes effectuée à l'aide de* **changement d'inconnue** ou en employant une **inconnue auxiliaire.**

I. Exemples d'équations et d'inéquations irrationnelles

9. 1 RAPPEL DE PROPRIÉTÉS DE ℝ

a) Propriété des égalités.

Lorsque l'égalité $a = b$ est vérifiée par deux nombres réels a et b, l'égalité $a^2 = b^2$ est vérifiée également.

Inversement, lorsque deux nombres a et b vérifient l'égalité $a^2 = b^2$, ces nombres ont *même valeur absolue*, mais leurs signes sont quelconques : ils sont donc égaux ou opposés

Donc *quel que soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} 0 \leqslant a \\ 0 \leqslant b \\ a^2 = b^2, \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant a \\ 0 \leqslant b \\ a = b, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a \leqslant 0 \leqslant b \\ a^2 = b^2, \end{cases} \iff \begin{cases} a \leqslant 0 \leqslant b \\ a = -b, \end{cases}$$

et enfin d'une manière générale

$$(a^2 = b^2) \iff (|a| = |b|)$$

b) Propriété des inégalités.

Comme dans le cas des égalités, nous allons comparer les carrés a^2 et b^2 de deux nombres a et b, en supposant connue la relation d'ordre existant entre a et b Soit, par exemple $a \leqslant b$. Trois cas sont à envisager.

1. Supposons $0 \leqslant a \leqslant b$; on en déduit $a^2 \leqslant ab$ et $ab \leqslant b^2$ (puisque a et b sont positifs (cf. § 4. 1 a)), d'où $a^2 \leqslant b^2$.

2. Supposons ensuite $a \leqslant b \leqslant 0$; on en déduit : $a^2 \geqslant ab$ et $ab \geqslant b^2$ (puisque a et b sont négatifs), d'où $a^2 \geqslant b^2$.

3. Si enfin, $a \leqslant 0 \leqslant b$, on ne peut rien conclure; on a par exemple :

$$\begin{cases} a = -2, & b = +5 & a < b \\ a^2 = 4, & b^2 = 25 & a^2 < b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -7, & b = +1 & a < b \\ a^2 = 49, & b^2 = 1 & a^2 > b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -3, & b = 3 & a < b \\ a^2 = 9, & b^2 = 9 & a^2 = b^2 \end{cases}$$

Ces exemples montrent que, si $a < 0 < b$, suivant les valeurs absolues de a et b, tous les cas $a^2 < b^2$, $a^2 = b^2$, $a^2 > b^2$ peuvent se présenter.

La conclusion que l'on peut tirer de cette étude est donc : *quels que soient* a *et* b *réels :*

$$(0 < a < b) \longrightarrow (a^2 < b^2)$$
$$(a < b < 0) \longrightarrow (a^2 > b^2)$$

et dans tous les cas, puisque $|a|$ et $|b|$ sont des nombres positifs :

$$|a| \leqslant |b| \Longrightarrow a^2 \leqslant b^2$$

Inversement, sachant comparer les carrés a^2 et b^2 de deux nombres réels a et b, et ayant par exemple $a^2 \leqslant b^2$, on en déduit $|a| \leqslant |b|$. Plus précisément

si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors $a \leqslant b$,
si $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$, alors $a \geqslant b$,
si a et b sont de signes contraires, le plus petit est, évidemment, celui qui est négatif

Résumons *quels que soient les nombres réels a et b on a*

$$(0 \leqslant a \leqslant b) \Longleftrightarrow (a^2 \leqslant b^2 \text{ et } a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0)$$
$$(a \leqslant b \leqslant 0) \Longleftrightarrow (a^2 \geqslant b^2 \text{ et } a \leqslant 0 \text{ et } b \leqslant 0)$$
$$(|a| \leqslant |b|) \Longleftrightarrow (a^2 \leqslant b^2)$$

Rappelons enfin que $\sqrt{a}$ représente un nombre réel α si et seulement si $a \geqslant 0$ et qu'on a toujours $\alpha \geqslant 0$; il en résulte en particulier que pour tout a réel on a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Nous allons utiliser ces résultats pour résoudre quelques équations et inéquations irrationnelles.

9. 2 EXEMPLES D'ÉQUATIONS IRRATIONNELLES

a) Exemple 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation*

$$\sqrt{x+5} = 1 - x \qquad (1)$$

La fonction intervenant dans l'équation n'est définie que pour $x + 5 \geqslant 0$.
Quel que soit x réel vérifiant cette inégalité, les relations suivantes sont équivalentes :

$$\sqrt{x+5} = 1 - x, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x + 5 = (1-x)^2 & (2) \\ 1 - x \geqslant 0 & (3) \end{cases}$$

en donnant à l'accolade le sens d'une conjonction.

Remarquons que si x réel vérifie (2), $x + 5$ est égal au carré d'un nombre, il est donc positif ou nul et $\sqrt{x+5}$ existe. La condition $x + 5 \geqslant 0$ n'est donc pas à retenir pour la résolution. L'équation (2) s'écrivant $x^2 - 3x - 4 = 0$ on a *pour tout x réel*

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ x \leqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \quad \text{ou} \quad x = +4 \\ x \leqslant 1 \end{cases}$$

Si S désigne l'ensemble des solutions de (1), on a donc :

$$S = \{-1\}.$$

REMARQUE

Si l'on voulait résoudre l'équation

$$(1') \qquad \sqrt{x+5} = x - 1,$$

pour tout x réel, on aurait obtenu les équivalences suivantes

$$(1') \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 5 = (x-1)^2 \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 & (2') \\ x \geqslant 1 & (3') \end{cases}$$

L'équation (2′) et l'équation (2) sont identiques, mais les conditions (3) et (3′) sont essentiellement distinctes et pour cette équation (1′) l'ensemble des solutions est $S' = \{+4\}$

b) Exemple 2.

Résoudre l'équation

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3x-1} \qquad (1)$$

En élevant au carré les deux membres de cette équation, on obtient

$$x + 1 + x - 3 + 2\sqrt{(x+1)(x-3)} = 3x - 1. \qquad (2)$$

Ces équations n'ont pas le même domaine de définition puisque pour (1) :

$$D_1 = [-1, +\infty[\cap [3, +\infty[\cap \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[= [3, +\infty[$$

et pour (2) :

$$D_2 =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[.$$

Par contre, on sait que les deux membres de l'équation (1), s'ils existent sont de même signe. *Quel que soit x réel*, on peut donc écrire :

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} (2) \\ x \in [3, +\infty[\end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(x+1)(x-3)} = x + 1 \\ x \in [3, +\infty[\end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4(x+1)(x-3) = (x+1)^2 \\ x \in [3, +\infty[. \end{cases} \qquad (3)$$

(car, dès que x est élément de l'intervalle $[3, +\infty[$, $x + 1$ est positif).

D'où pour tout x réel, on a

$$(1) \iff \begin{cases} (x+1)(3x-13) = 0 \\ x \geqslant 3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (1) est donc $S = \left\{\frac{13}{3}\right\}$

REMARQUES

1. Il est possible de résoudre une telle équation en utilisant seulement des implications. *Pour tout x réel* on a

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3x-1} \qquad (1)$$

$$(1) \Longrightarrow 2\sqrt{(x+1)(x-3)} = x+1 \qquad (2)$$

$$\Longrightarrow (x+1)(3x-13) = 0 \qquad (3)$$

L'ensemble des solutions de l'équation (3), appelée quelquefois *équation résolvante* de (1) est

$$S' = \left\{-1, +\frac{13}{3}\right\}.$$

Lorsque (1) est vérifiée, (4) l'est; donc $S \subset S'$.
Il suffit de vérifier si les (ou une) valeurs réelles contenues dans S' font partie ou non de S
Pour la valeur -1, on constate que $x - 3 < 0$, donc $-1 \notin S$
Pour la valeur $+\frac{13}{3}$, chacun des membres de (1) prend la valeur $2\sqrt{3}$.
Donc $+\frac{13}{3} \in S$ et, plus précisément, $S = \left\{+\frac{13}{3}\right\}$.

2. L'équation résolvante (3) aurait été obtenue à partir des équations

$$\varepsilon\sqrt{x+1} + \varepsilon'\sqrt{x-3} = \varepsilon''\sqrt{3x-1},$$

où chacun des nombres $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ peut prendre la valeur $+1$ ou la valeur -1.

EXERCICE

Quel est le nombre de ces équations (cf remarque 2).

9. 3 EXEMPLES D'INÉQUATIONS IRRATIONNELLES

a) Exemple 1.

Résoudre l'inéquation

$$\sqrt{2-x} > x+4 \qquad (1)$$

1. Si $x + 4 \leqslant 0$ et si $2 - x \geqslant 0$, (1) est vérifiée, puisqu'un nombre négatif est toujours inférieur à un nombre positif. Ces deux conditions sont réalisées pour

$$x \in]-\infty, -4] \cap]-\infty, 2] =]-\infty, -4]$$

2. Si $x + 4 > 0$, alors $2 - x \geqslant 0$ les deux membres de (1) sont positifs. En élevant au carré ces deux membres, on obtient une relation qui est vérifiée dès que x est solution de (1) :

$$2 - x > (x+4)^2 \qquad (2)$$

Remarquons que toute solution de cette inéquation (2) est telle que $(2 - x)$ est supérieur au carré d'un nombre réel, donc $2 - x \geqslant 0$ et $\sqrt{2-x}$ existe.

Pour toute valeur réelle de x, telle que $x + 4 > 0$ on a donc

$$(1) \iff (x^2 + 9x + 14 < 0) \iff x \in]-7, -2[.$$

Nous sommes dans le cas où $x + 4 > 0$, donc $x > -4$. Les valeurs de x qui sont solutions, sont donc les valeurs de

$$]-4, +\infty[\cap]-7, -2[=]-4, -2[$$

Par suite, l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S =]-\infty, -4] \cup]-4, -2[=]-\infty, -2[.$$

b) Exemple 2.

Résoudre l'inéquation

$$x + 3 > \sqrt{x+1} \qquad (1)$$

Si $x + 3 \leqslant 0$, l'inéquation ne peut pas être vérifiée.
Si $x + 3 > 0$, en élevant au carré les deux membres de l'inéquation (1), on obtient une inéquation (2) qui est vérifiée par toute solution de (1) :

$$(x+3)^2 > x+1 \qquad (2)$$

Mais toute solution de (2) n'est pas solution de (1), car, cette fois, l'inéquation (2) ne contient pas implicitement la condition $x + 1 \geqslant 0$, qui est nécessaire pour l'existence de $\sqrt{x+1}$.
Donc, *pour tout x réel tel que* $x + 3 > 0$: on a

$$(1) \iff \begin{cases} (x+3)^2 > x+1 \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + 5x + 8 > 0 \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Or pour tout x réel $x^2 + 5x + 8 > 0$ (car $\Delta = 5^2 - 4 \times 8 < 0$ et le coefficient de x^2 est $1 > 0$).
Donc x est solution de (1) si et seulement si $x + 3 > 0$ et $x + 1 \geqslant 0$.
Par suite, l'ensemble S des solutions de (1) est $S = [-1, +\infty[$.

II. Exemples de systèmes d'équations

9. 4 SYSTÈMES SYMÉTRIQUES

On se propose de résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues x et y tels que x et y interviennent symétriquement; c'est-à-dire que le système ne change pas si on transpose x et y.
Il a été résolu un système de ce type dans le cours de Seconde, lorsque l'on a calculé deux nombres réels connaissant leur somme et leur produit :

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

Il a été démontré que x et y sont alors les racines si elles existent, de l'équation $u^2 - su + p = 0$ (la condition d'existence étant $s^2 - 4p \geqslant 0$). u' et u'' étant les racines de cette équation, les solutions de (1) sont alors (u', u'') et (u'', u').
Nous allons résoudre plusieurs systèmes de ce type et montrer sur ces exemples qu'on peut toujours se ramener à la recherche de deux nombres connaissant leur somme et leur produit

9. 5 EXEMPLES DE SYSTÈMES SYMÉTRIQUES

a) Exemple 1.

Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^3 + y^3 = 5. \end{cases}$

Quels que soient x et y réels, on a

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ (x + y)^2 - 2xy = 5 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 9 - 2xy = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Donc (x, y) est solution du système proposé si et seulement si x et y sont racines de l'équation

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$

Par conséquent $u \in \{1, 2\}$ et si l'on appelle S l'ensemble des solutions du système donné on a :

$$S = \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

b) Exemple 2.

Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 7 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{12}. \end{cases}$

Les solutions sont à rechercher dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.
Pour toutes valeurs réelles non nulles de x et y on a

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Donc x et y sont racines de l'équation

$$u^2 - 7u + 12 = 0$$

D'où $u \in \{3, 4\}$ et

$$S = \{(3, 4), (4, 3)\}$$

c) Exemple 3.

Résoudre le systeme

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{7}{3} \\ x^3 + y^3 = 3 \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, posons $x + y = s$ et $xy = p$.
Le système s'écrit

$$\begin{cases} s^2 - 2p = \dfrac{7}{3} \\ s(s^2 - 3p) = 3. \end{cases}$$

Quels que soient s et p réels, le système précédent est équivalent à

$$\begin{cases} p = \dfrac{s^2}{2} - \dfrac{7}{6}, \\ s^3 - 3s\left(\dfrac{s^2}{2} - \dfrac{7}{6}\right) - 3 = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} p = \dfrac{s^2}{2} - \dfrac{7}{6} \\ -\dfrac{s^3}{2} + \dfrac{7s}{2} - 3 = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} p = \dfrac{s^2}{2} - \dfrac{7}{6} \\ s^3 - 7s + 6 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

L'équation (1) a pour racine 1 en évidence on a donc

$$s^3 - 7s + 6 - (1^3 - 7 \cdot 1 + 6) = (s^3 - 1) - 7(s - 1) = (s - 1)(s^2 + s + 1 - 7)$$

et par conséquent l'équation (1) s'écrit

$$(s - 1)(s^2 + s - 6) = 0$$

Les racines de (1) sont donc 1, 2 et -3.
Par conséquent les nombres p et s sont tels que

$$\left(p = \frac{s^2}{2} - \frac{7}{6}\right) \quad \text{et} \quad (s = 1 \quad \text{ou} \quad s = 2 \quad \text{ou} \quad s = -3)$$

Les couples (s, p) cherchés sont ainsi solutions de l'*un quelconque des systèmes suivants*

$$\text{(I)} \begin{cases} s = 1 \\ p = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} s = 2 \\ p = \dfrac{5}{6} \end{cases} \qquad \text{(III)} \begin{cases} s = -3 \\ p = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées de chacun des couples (x, y) solutions du système proposé sont donc les racines de l'une ou l'autre des équations correspondantes suivantes

$$\text{(I')} \quad u^2 - u - \frac{2}{3} = 0, \qquad \text{(II')} \quad u^2 - 2u + \frac{5}{6} = 0, \qquad \text{(III')} \quad u^2 + 3u + \frac{10}{3} = 0.$$

On montrera qu'il existe ainsi 4 couples solutions du système donné car il n'existe pas de nombres réels solutions de (III').

9. 6 EXEMPLES DE SYSTÈMES SE RAMENANT A UN SYSTÈME SYMÉTRIQUE

a) Exemple 1.

Résoudre le système (1) $\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = -14 \end{cases}$

Ce système n'est pas symétrique en x et y. Cependant quel que soit (x, y) de $\mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = -14 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + (-y) = 9 \\ x(-y) = 14; \end{cases} \qquad (2)$$

le système (2) est symétrique par rapport aux deux variables x et $-y$ qui sont par suite solutions de

$$u^2 - 9u + 14 = 0,$$

ces solutions sont 2 et 7 on a donc soit $x = 2$ et $-y = 7$, soit $x = 7$ et $-y = 2$, par conséquent l'ensemble S des solutions de (1) est

$$S = \{(2, -7), (7, -2)\}.$$

b) Exemple 2.

Résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ xy = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Quel que soit (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ xy = -\sqrt{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-y^2) = -2 \\ x^2(-y^2) = -3 \\ xy < 0. \end{cases}$$

Cherchons x^2 et $-y^2$, ce sont les solutions de

$$u^2 + 2u - 3 = 0;$$

ces solutions sont 1 et -3 on a donc

$$x^2 = 1 \quad \text{et} \quad -y^2 = -3.$$

Enfin la condition $xy < 0$ nous donne les deux possibilités

$$\text{soit } (x = 1 \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{3}) \qquad \text{soit } (x = -1 \quad \text{et} \quad y = \sqrt{3}).$$

L'ensemble S des solutions du système donné est donc

$$S = \{(1, -\sqrt{3}), (-1, \sqrt{3})\}$$

EXERCICE

Les nombres réels a et b étant donnés, étudier le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b. \end{cases}$$

Montrer en particulier que, quel que soit $(a, b) \neq (0, 0)$, ce système a deux solutions distinctes.

9. 7 UN PROBLÈME RÉSOLU

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel λ *le système*

$$(\text{I}) \begin{cases} x^3 = x - \lambda y \\ y^3 = y - \lambda x \end{cases}$$

Ce système est symétrique. Pour le résoudre remarquons que quels que soient les nombres réels a, a', b, b' on a

$$\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a + b = a' + b' \\ a - b = a' - b' \end{cases}$$

On a donc *quels que soient les nombres réels* x, y, λ

$$(\text{I}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = (x - y)(1 + \lambda) \\ x^3 + y^3 = (x + y)(1 - \lambda), \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x - y)[x^2 + xy + y^2 - (1 + \lambda)] = 0 & (1) \\ (x + y)[x^2 - xy + y^2 - (1 - \lambda)] = 0 & (2) \end{cases}$$

Or *quels que soient les nombres réels* x, y, λ on a

$$(1) \Longleftrightarrow [(x = y) \quad \text{ou} \quad (x^2 + xy + y^2 = 1 + \lambda)],$$
$$(2) \Longleftrightarrow [(x = -y) \quad \text{ou} \quad (x^2 - xy + y^2 = 1 - \lambda)].$$

Par conséquent *quels que soient* x, y, λ la relation exprimée par (I), c'est-à-dire

$$[(x = y) \quad \text{ou} \quad (x^2 + xy + y^2 = 1 + \lambda)] \quad \text{et} \quad [(x = -y) \quad \text{ou} \quad (x^2 - xy + y^2 = 1 - \lambda)]$$

est équivalente à

$$(\text{II}) \begin{cases} x = y \\ x = -y, \end{cases} \text{ ou } (\text{III}) \begin{cases} x = y \\ x^2 - xy + y^2 = 1 - \lambda, \end{cases} \text{ ou } (\text{IV}) \begin{cases} x = -y \\ x^2 + xy + y^2 = 1 + \lambda, \end{cases}$$
$$\text{ou } (\text{V}) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 + \lambda \\ x^2 - xy + y^2 = 1 - \lambda, \end{cases}$$

en donnant, comme d'habitude à l'accolade le sens d'une conjonction.

L'ensemble des solutions de (I) est donc la *réunion* des ensembles de solutions des systèmes (II), (III), (IV) et (V).

Le système (II) a pour unique solution (0, 0) donc $S_{(\text{II})} = \{(0, 0)\}$

Quels que soient x, y, λ réels on a

$$(\text{III}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 1 - \lambda, \end{cases}$$

donc
$$\begin{aligned} &\text{si } \lambda < 1, && S_{\text{III}} = \{(-\sqrt{1 - \lambda}, -\sqrt{1 - \lambda}), (\sqrt{1 - \lambda}, \sqrt{1 - \lambda})\}, \\ &\text{si } \lambda = 1, && S_{\text{III}} = \{(0, 0)\}, \\ &\text{si } \lambda > 1, && S_{\text{III}} = \varnothing \end{aligned}$$

De même, *quels que soient* x, y, λ *réels*, on a

$$(\text{IV}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = 1 + \lambda, \end{cases}$$

donc
$$\begin{aligned} &\text{si } \lambda > -1 && S_{\text{IV}} = \{(-\sqrt{1 + \lambda}, \sqrt{1 + \lambda}), (\sqrt{1 + \lambda}, -\sqrt{1 + \lambda})\}, \\ &\text{si } \lambda = -1 && S_{\text{IV}} = \{(0, 0)\}, \\ &\text{si } \lambda < -1 && S_{\text{IV}} = \varnothing. \end{aligned}$$

En appliquant la remarque faite au début du paragraphe on voit que, ***quels que soient*** x, y, λ *réels*, on a

$$(V) \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy = \lambda, \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 1 \\ xy = \lambda, \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (x+y)^2 = 1 + 2\lambda \\ xy = \lambda \end{cases}$$

Posons $x + y = s$ et $xy = p$, on a
$s^2 = 1 + 2\lambda$, $p = \lambda$,
le système (V) n'a donc pas de solution si $\lambda < -\frac{1}{2}$.

Supposons $\lambda \geqslant -\frac{1}{2}$; la condition d'existence de x et y est alors

$$s^2 - 4p = 1 + 2\lambda - 4\lambda = 1 - 2\lambda \geqslant 0,$$

c'est-à-dire $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$.

D'où la discussion du système (V)

$\lambda < -\frac{1}{2}$, $S_V = \varnothing$

$\lambda = -\frac{1}{2}$, $x + y = 0$, $xy = -\frac{1}{2}$ donc $S_V = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$

$-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{1}{2}$, on a soit $s = -\sqrt{1 + 2\lambda}$ et $p = \lambda$,
soit $s = \sqrt{1 + 2\lambda}$ et $p = \lambda$.

Désignons par u' et u'' les racines qui sont distinctes de l'équation $u^2 + u\sqrt{1 + 2\lambda} + \lambda = 0$ celles de $u^2 - u\sqrt{1 + 2\lambda} + \lambda$ sont $-u'$ et $-u''$, on a donc dans ce cas $\left(-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{1}{2}\right)$.

$$S_V = \{(u', u''), (u'', u'), (-u', -u''), (-u'', -u')\}$$

$\lambda = \frac{1}{2}$, on a $p = \frac{1}{2}$ et $(s = \sqrt{2}$ ou $s = -\sqrt{2})$, on trouve

$$S_V = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}.$$

$\lambda > \frac{1}{2}$, $s^2 - 4p < 0$ donc $S_V = \varnothing$.

Le tableau suivant récapitule le nombre des solutions distinctes de (I) : il faut faire attention au fait que dans certains cas deux des systèmes (II) à (V) peuvent avoir une solution commune. Ainsi (0, 0) est toujours solution de (I); (0, 0) est solution de (III) et de (IV) respectivement pour $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$; (0, 0) n'est jamais solution de (V) car $s = \varepsilon\sqrt{1 + 2\lambda}$, $p = \lambda$.

Pour $\lambda = -\frac{1}{2}$, (IV) et (V) ont chacun deux solutions qui sont les mêmes, de même (III) et (V) pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

Le tableau suivant indique le nombre de solutions de chacun des systèmes (II) à (V) lorsqu'elles sont toutes distinctes, et les solutions communes lorsqu'il y en a.

	(II)	(III)	(IV)	(V)	(I)
$\lambda < -1$	1	2	0	0	3
$\lambda = -1$	1 (0, 0)	2	1 (0, 0)	0	3
$-1 < \lambda < -\frac{1}{2}$	1	2	2	0	5
$\lambda = -\frac{1}{2}$	1	2	2 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	2 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	5
$-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{1}{2}$	1	2	2	4	9
$\lambda = \frac{1}{2}$	1	2 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	2	2 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	5
$\frac{1}{2} < \lambda < 1$	1	2	2	0	5
$\lambda = 1$	1 (0, 0)	1 (0, 0)	2	0	3
$1 < \lambda$	1	0	2	0	3

EXERCICE

Le repère étant orthonormé on désigne par C_λ la courbe d'équation $x^3 = x - \lambda y$ et par C'_λ la courbe d'équation $y^3 = y - \lambda x$.
Comment sont situées ces deux courbes par rapport à la bissectrice des axes?
Construire ces deux courbes sur un même graphique dans chacun des cas suivants

a) $\lambda = 0$ ***b)*** $\lambda = 1$ ***c)*** $\lambda = \frac{1}{2}$ ***d)*** $\lambda = \frac{1}{3}$.

(Pour $\lambda \neq 0$ on remarquera que C_λ est la courbe représentative de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\lambda}(x - x^3)$$

9. 8 EXEMPLES DE CHANGEMENT D'INCONNUES

a) Exemple 1. *Résoudre le système*

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{y+3} = 5 \\[2mm] \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{y+3} = -4 \end{cases}$$

Si (x, y) est solution de (I) on a $x \neq 2$ et $y \neq -3$; posons

$$X = \frac{1}{x-2} \qquad Y = \frac{1}{y+3};$$

on est ramené à résoudre le système

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} X + 2Y = 5 \\ 2X - 3Y = -4 \end{cases}$$

dont la solution unique est $(X, Y) = (1, 2)$; on en déduit $x - 2 = 1$, d'où $x = 3$ et $y + 3 = \frac{1}{2}$ d'où $y = -\frac{5}{2}$.

Donc (I) a une solution unique $\left(3, -\frac{5}{2}\right)$

b) Exemple 2. *Résoudre le système*

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$$

Si (x, y) est solution de (I) on a $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$; nous chercherons donc les solutions uniquement dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
Posons

$$2\sqrt{x} = X \qquad \text{et} \qquad \sqrt{y} = Y$$

on a donc également $(X, Y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et

$$4x = X^2, \quad y = Y^2$$

Il nous faut résoudre le système

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} X - Y = 1 \\ X^2 - Y^2 = 9. \end{cases}$$

Or *quel que soit* $(X, Y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, on a

$$\text{(II)} \iff \begin{cases} X - Y = 1 \\ (X - Y)(X + Y) = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} X - Y = 1 \\ X + Y = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} X = 5 \\ Y = 4 \end{cases}$$

d'où $x = \frac{25}{4}$, $y = 16$. Le système (I) a pour unique solution $\left(\frac{25}{4}, 16\right)$.

9. 9 EXEMPLES D'EMPLOI D'UNE INCONNUE AUXILIAIRE

a) Exemple 1.

Résoudre le système

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \dfrac{x}{16{,}42} = \dfrac{y}{-8{,}37} = \dfrac{z}{5{,}26} & (1) \\ x + y + z = 133{,}1 & (2) \end{cases}$$

Utilisons l'inconnue auxiliaire k telle que

$$\frac{x}{16{,}42} = \frac{y}{-8{,}37} = \frac{z}{5{,}26} = k \qquad (3)$$

Les équations (3) nous donnent

$$\text{(4)}\quad \begin{cases} x = 16{,}42\,k \\ y = -8{,}37\,k \\ z = 5{,}26\,k, \end{cases}$$

l'équation (2) nous donnera la valeur de k

$$k\,(16{,}42 - 8{,}37 + 5{,}26) = 133{,}1$$
$$13{,}31\,k = 133{,}1$$

d'où $k = 10$. Le système (I) a donc une solution unique (x, y, z) où $x = 164{,}2$, $y = -83{,}7$, $z = 52{,}6$.

EXERCICE

On donne les nombres réels α, β non nuls et les nombres réels x_0, y_0, u, v, w; résoudre le système

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} & (1) \\ ux + vy + w = 0. & (2) \end{cases}$$

On introduira l'inconnue auxiliaire $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \rho$.

Si $(u, v) \neq (0, 0)$ on reconnaîtra la discussion de l'intersection de la droite D passant par $M_0(x_0, y_0)$ de vecteur directeur (α, β) avec la droite Δ d'équation cartésienne $ux + vy + w = 0$ (cf. Cours de Seconde)

b) Exemple 2.

On donne les nombres réels α, β, γ *non nuls et les nombres réels* x_0, y_0, z_0, u, v, w, h; *résoudre le système*

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma} & (1) \\ ux + vy + wz + h = 0. & (2) \end{cases}$$

Utilisons l'inconnue auxiliaire ρ

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho. \qquad (3)$$

On a donc

$$(4) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha\rho \\ y = y_0 + \beta\rho \\ z = z_0 + \gamma\rho. \end{cases}$$

L'équation (2) et le système (4) nous donnent

$$u(x_0 + \alpha\rho) + v(y_0 + \beta\rho) + w(z_0 + \gamma\rho) + h = 0$$

(5) $$(u\alpha + v\beta + w\gamma)\rho + ux_0 + vy_0 + wz_0 + h = 0.$$

D'où la discussion :

1. $u\alpha + v\beta + w\gamma \neq 0$, il y a une solution unique (x, y, z) de (1) déterminée par les formules (4) où

$$\rho = -\frac{ux_0 + vy_0 + wz_0 + h}{u\alpha + v\beta + w\gamma}.$$

2. $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$ et $ux_0 + vy_0 + wz_0 + h \neq 0$. L'équation (5) n'a pas de solution; il en est de même de (1).

3. $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$ et $ux_0 + vy_0 + wz_0 + h = 0$. L'équation (5) a pour solution tout nombre réel. Le système 1 a donc une *infinité de solutions à un paramètre* ρ

$$(x_0 + \rho\alpha, y_0 + \rho\beta, z_0 + \rho\gamma).$$

REMARQUE

Nous verrons dans le cours de Première (t. II, géométrie dans l'espace) que, si $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$, l'équation (2) représente un plan P et les équations (1) la droite D passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur (α, β, γ). La résolution du système (1) est la recherche analytique des points communs à D et P.

Nous verrons que $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$ signifie que D est parallèle à P. Les trois cas correspondent à :

1. D et P sécants.
2. $D \cap P = \varnothing$ (D et P strictement parallèles)
3. $D \subset P$



EXERCICES

Équations irrationnelles numériques : 1 à 9.

Équations irrationnelles paramétriques : A, 10 à 15.

Inéquations irrationnelles : 16 à 23.

Systèmes d'équations : 23 à 38.

Exercice résolu.

9.A Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre des racines de l'équation

$$\sqrt{(m - 1)x^2 - 2m} = 2 - x \qquad (1)$$

a) *Pour les raisons données au* § 9.2 (*exemple* 1), quels que soient les nombres réels x et m on a

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} (m - 1)x^2 - 2m = (2 - x)^2, \\ 2 - x \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (m - 2)x^2 + 4x - 2(m + 2) = 0, \\ x < 2 \end{cases} \qquad (2)$$

Il faut donc discuter le nombre des racines de l'équation (2) *qui sont inférieures à* 2.

b) *A ce sujet, rappelons un résultat établi dans le livre de* 2ᵉ CT (*t.* 1, *p.* 205) :

Le nombre $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, *lorsqu'il est non nul, a un signe déterminé de la façon suivante*

1. *Dans le seul cas où le trinôme* $ax^2 + bx + c$ *a des racines distinctes* $\alpha < \beta$ *et où* $\alpha < x < \beta$, $ax^2 + bx + c$ *et le coefficient* a *de* x^2 *sont de signes opposés, soit* $a(ax^2 + bx + c) < 0$.

2. *Dans tous les autres cas,* $ax^2 + bx + c$ *et le coefficient* a *de* x^2 *ont le même signe soit*

$$a(ax^2 + bx + c) > 0.$$

Donc étant donné l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ *où* $a \neq 0$, *si l'on calcule* $a(ax_0^2 + bx_0 + c)$ *pour une valeur donnée* x_0 *de* x :

1. *Si* $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$, *on peut conclure que cette équation a des racines distinctes* $\alpha < \beta$ *et que* $\alpha < x_0 < \beta$.

2. *Si* $a(ax_0^2 + bx_0 + c) > 0$, *il faut calculer son discriminant* Δ. *Si* $\Delta > 0$ *il y a des racines distinctes* $\alpha < \beta$ *et on est assuré que* x_0 *est extérieur à* $[\alpha, \beta]$. *Pour savoir si* $x_0 < \alpha$ *ou bien* $x_0 > \beta$ *il suffit de comparer* x_0 *à un nombre compris entre* α *et* β (*leur demi-somme, par exemple*).

3. *Si* $a(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0$, x_0 *est l'une des racines de l'équation.*

c) *Pour* $m = 2$, *l'équation* (2) *devient* $4x - 8 = 0$, *elle a pour racine* 2 *donc l'équation* (1) *a pour racine unique* 2.

Pour $m \neq 2$ *posons*

$$f(x) = (m - 2)x^2 + 4x - 2(m + 2)$$

on a $a = m - 2$, *calculons donc* Δ' *et* $(m - 2)f(2)$ *et cherchons leur signe suivant les valeurs de* m

$$\Delta' = 4 + 2(m - 2)(m + 2) = 2m^2 - 4,$$

donc $\Delta' = 0$ *pour* $m = -\sqrt{2}$ *et* $m = \sqrt{2}$.

$(m - 2)f(2) = (m - 2)[4(m - 2) + 8 - 2(m + 2)] = (m - 2)(2m - 4) = 2(m - 2)^2$, *donc quel que soit* $m \neq 2$ *on a* $(m - 2)f(2) > 0$; *par conséquent* 2 *est toujours extérieur à l'intervalle* $[\alpha, \beta]$ *des racines.*

Comparons 2 *à la demi-somme des racines*

$$\frac{s}{2} - 2 \qquad \frac{2}{m - 2} - 2 \qquad 2\frac{m - 1}{m - 2}$$

Resumons les resultats dans un tableau ou S designe l'ensemble des solutions de l'equation (1).

m	Δ'	$(m \quad 2) f(2)$	$\frac{s}{2} \quad 2$	Racines de (2)	S
$+\infty$					
	+	+		$\alpha < \beta < 2$	$\{\alpha, \beta\}$
2					
	+	+	+	$2 < \alpha < \beta$	$\varnothing$
$\sqrt{2}$	0				
					$\varnothing$
$\sqrt{2}$	0				
	+	·		$\alpha < \beta < 2$	$\{\alpha, \beta\}$
∞					

Pour m   2, *l'equation* (2) *est du* 1*er* *degre nous avons vu que* S   {2}

Pour m $\sqrt{2}$, $\alpha \quad \beta \quad \frac{s}{2}$ et $\frac{s}{2} \quad 2 \quad 0$ *donc* S $\varnothing$.

Pour m $= -\sqrt{2}$, $\alpha = \beta = \frac{s}{2}$ et $\frac{s}{2} - 2 < 0$ *donc* $S = \{\alpha\}$,

$$\text{où } \alpha = \frac{-2}{\sqrt{2} \quad 2} = \frac{2}{\sqrt{2} + 2} = 2\,\frac{2 - \sqrt{2}}{4 \quad 2} = 2 - \sqrt{2}.$$

Exercices.

Résoudre les équations suivantes (ex. 1 à 9).

9.1 $\sqrt{x + 5} = 1 - x.$

9.2 $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 4 - x.$

9.3 $\sqrt{-x^2 + 1} = |x|.$

9.4 $\sqrt{|2x - 5|} = x + 3.$

9.5 $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 8} = 5.$

9.6 $\sqrt{11 - x} - \sqrt{x - 1} = 2.$

9.7 $2\sqrt{3 + 2x} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{12x + 13}.$

9.8 $\sqrt{|x^2 - x - 6|} = x + 1.$

9.9 $\sqrt{-x^2 - x + 12} = |2 - x|.$

Discuter et résoudre les équations suivantes (ex. 10 à 15).

9.10 $\sqrt{x - m} = x - 2.$

9.11 $\sqrt{mx + 1} \quad x + 3$

9.12 $\sqrt{x^2 + x - 3} = x + m.$

9.13 $\sqrt{4 \quad x^2} \quad mx + 1.$

9.14 $\sqrt{x^2 + mx \quad 1} = -x + 3m.$

9.15 $\sqrt{x^2 + mx \quad 1} \quad | \quad x + 3m|$

Résoudre les inéquations suivantes (ex 16 à 23).

9.16 $x + 2 < \sqrt{x + 5}.$

9.17 $x + 2 \geqslant \sqrt{x + 5}.$

9.18 $x \quad 2 < \sqrt{x + 5}$

9.19 $x - 2 \quad \sqrt{x + 5}$

9.20 $|x| < \sqrt{3x^2 - 4x + 2}.$

9.21 $-x + 1 > \sqrt{3x^2 \quad 2x \quad 7}$

9.22 $x - 1 < \sqrt{x^2 - 1}.$

9.23 $x + 3 \geqslant \sqrt{x^2 + 27}.$

Résoudre les systèmes suivants (ex. 24 à 37).

9.24 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13. \\ xy = 6. \end{cases}$

9.25 $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 20, \\ xy = -20. \end{cases}$

9.26 $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 12. \end{cases}$

9.27 $\begin{cases} x^2 + y^2 \quad 5, \\ x^3 + y^3 \quad 9 \end{cases}$

9.28 $\begin{cases} x + y + xy = -5, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

9.29 $\begin{cases} x^2 = ax + by, \\ y^2 \quad bx + ay \end{cases}$

9.30 $\begin{cases} x^3 = ax + by, \\ y^3 = bx + ay. \end{cases}$

9.31 $\begin{cases} \frac{1}{x^2} \quad \frac{1}{y^2} \quad 85, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad 5 \end{cases}$

9.32 $\begin{cases} x - y = 6, \\ (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 1440. \end{cases}$

9.33 $\begin{cases} x + y \quad 1, \\ x^5 + y^5 \quad 31. \end{cases}$

9.34 $\begin{cases} \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{7}{x + 1} + \frac{3}{y - 2}, \\ \frac{1}{(y \quad 2)^2} = \frac{7}{y - 2} + \frac{3}{x + 1}. \end{cases}$

9.35 $\begin{cases} \frac{x - 1}{3} \quad \frac{y \quad 4}{2} \quad \frac{2z - 1}{2}, \\ 3x - y \quad 6z \quad 4 \quad 0 \end{cases}$

9.36 $\begin{cases} 2x - 3y - -z, \\ x + y + z = 7. \end{cases}$

9.37 $\begin{cases} -x + y + z = 0, \\ x \quad y + z \quad 2, \\ x + y \quad z \quad 4 \end{cases}$

9.38* Discuter le système suivant

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = a, \\ x + \lambda y \quad z \quad b, \\ x + y + \lambda z \quad c. \end{cases}$$

(On prendra $s = x + y + z$ pour inconnue auxiliaire.)



10

Calculs numériques

La section I présente les généralités concernant le calcul numérique et l'utilisation des tables numériques

Sans reprendre la description de la règle à calcul *la section II présente l'échelle des inverses et son utilisation pour le calcul des produits et des quotients*

Ces deux sections I et II font partie du programme commun aux trois classes de Première C, D et E.

Dans le but d'être utile aux élèves de la classe de Première E, la section III reprend l'exposition, sur des exemples, des méthodes de calcul à l'aide des logarithmes décimaux.

Enfin la section IV est une introduction à la construction et à l'utilisation des abaques

Ces deux sections III et IV appartiennent seulement au programme de Première E.

I. Généralités. Utilisation des tables numériques

10. 1 VALEURS APPROCHÉES. ERREUR. INCERTITUDE. ENCADREMENT

a) Introduction.

Sauf lorsqu'il s'agit de nombres rationnels « simples », c'est-à-dire de quotients entiers dont la valeur absolue est inférieure à 100, ou même à 10, les calculs pratiques, lorsqu'ils sont effectués à la main, avec ou sans table de logarithmes, à la règle à calcul, ou avec certaines machines à calcul dites de bureau, utilisent la représentation décimale des nombres réels. Les calculatrices électroniques travaillent avec le système binaire, mais le plus souvent reçoivent les données et fournissent les résultats dans le système décimal.

C'est dire que dans un calcul pratique, un nombre réel non décimal n'interviendra jamais par sa valeur exacte, mais seulement par des valeurs décimales plus ou moins proches de cette valeur exacte

b) Erreur, incertitude.

Lorsqu'on remplace un nombre réel x par un nombre x' on commet une *erreur* $x - x' = e$. Si $e > 0$ on dit que x' est une *valeur approchée* de x par *défaut ;* si $e < 0$ on dit que x' est une *valeur approchée* par *excès*

En général x' est le résultat d'une mesure ou le résultat approché d'un calcul précédent et on ne connaît pas l'erreur, sinon on connaîtrait $x = x' + e$ exactement Mais dans la plupart des cas on connaît un *majorant* de $|e|$ (c'est-à-dire un nombre plus grand que $|e|$).

Ce majorant ε de $|e|$ est appelé l'**incertitude** avec laquelle on connaît le nombre x lorsque l'on prend x' pour valeur approchée de x.

On a donc

$$|x - x'| = |e| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$x' - \varepsilon < x < x' + \varepsilon$$

On dit que x est *encadré* par $x' - \varepsilon$ et $x' + \varepsilon$.

c) Encadrement.

D'une manière générale s'il existe deux nombres réels a et b tels que

$$a < x < b$$

on dit que x est **encadré** par a et b

Le nombre a est une *valeur approchée par défaut, l'incertitude étant* $b - a$.

Le nombre b est une *valeur approchée par excès, l'incertitude étant encore* $b - a$.

Si l'on prend pour valeur approchée de x le nombre $x' = \frac{a+b}{2}$ *on ne connaît pas le sens de l'approximation*, x pouvant être soit dans $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ soit dans $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ l'incertitude, avec le choix de $x' = \frac{a+b}{2}$ pour valeur approchée de x, est $\frac{b-a}{2}$

En posant $x' = \frac{a+b}{2}$ et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ nous avons $a = x' - \varepsilon$ et $b = x' + \varepsilon$ et par conséquent

$$x' - \varepsilon < x < x' + \varepsilon.$$

Un résultat numérique x pourra s'exprimer de plusieurs manières équivalentes :

1° Par *encadrement* $a < x < b$.

Par exemple .

$$1{,}41421 < x < 1{,}41422.$$

2° Par la donnée de *la plus petite valeur d'encadrement* a (valeur approchée par défaut) et l'*incertitude* ε; on a alors

$$a < x < a + \varepsilon.$$

3° Par la donnée de *la plus grande valeur d'encadrement* b (valeur approchée par excès et l'*incertitude* ε, on a alors

$$b - \varepsilon < x < b.$$

4° Par une valeur approchée x' et l'incertitude ε, on a alors

$$x' - \varepsilon < x < x' + \varepsilon.$$

Par exemple 1,414215 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$, l'incertitude est 5.10^{-6}.

d) Conclusion.

Dans la pratique, a et b seront des nombres décimaux. On sait que si x est un réel donné, il existe pour tout entier positif n, un nombre décimal unique de la forme $a_n . 10^{-n}$, où $a_n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a_n . 10^{-n} \leqslant x < (a_n + 1) . 10^{-n}$$

On peut donc *théoriquement* encadrer un nombre réel par des décimaux avec une incertitude aussi petite que l'on veut.

Pratiquement, on est cependant limité

soit par la dimension des calculatrices Pour chacune d'elles, le nombre des décimales qu'elle peut enregistrer est limité :

— soit par la précision des tables de logarithmes (les plus usuelles sont « à quatre ou à cinq décimales »), ou de la règle à calcul;

— soit par le temps rapidement croissant que demande une plus grande précision.

N'oublions pas enfin que beaucoup de données numériques ont une origine expérimentale, et à ce titre ne peuvent être fournies qu'avec une incertitude qui dépend de la précision des instruments de mesure et du soin de l'expérimentation, mais qui de toute manière ne pourra pas descendre au-dessous d'une certaine valeur

En conclusion, tout calcul pratique sera effectué sur des valeurs approchées décimales.

10. 2 ORDRE DE GRANDEUR. CHIFFRES SIGNIFICATIFS

Une présentation commode d'un résultat numérique consiste à l'écrire sous la forme d'un nombre compris entre 1 et 10 multiplié par une puissance (positive ou négative) de 10.

Par exemple 371,43 s'écrira $3,7143.10^2$
0,0000421 s'écrira $4,21.10^{-5}$.

L'exposant p de 10 fournit un premier encadrement puisque sa donnée permet d'affirmer que $10^p \leqslant x < 10^{p+1}$. Elle donne une première idée de l'ordre de grandeur de x, et toute faute de calcul sur p dénature le résultat et est *la plus grave des fautes que l'on puisse commettre*.

La précision avec laquelle doit être donnée une valeur approchée dépend de ce que l'on sait de l'incertitude avec laquelle elle permet d'encadrer la valeur exacte.

Supposant par exemple que la terre est assimilable à une sphère, cherchons son rayon en kilomètres en prenant pour valeur approchée par défaut de π le nombre 3,14 avec une incertitude de 10^{-2}.

Si l'on « calcule » $\frac{20\,000}{3,14}$, on peut donner autant de décimales que l'on veut, et en donner une valeur approchée telle que la suivante 6369,4. *Or, dans les conditions où l'on s'est placé les deux derniers chiffres n'ont aucune valeur.* On veut en effet évaluer $\frac{20\,000}{\pi}$ avec $3,14 < \pi < 3,15$. On a donc

$$\frac{20\,000}{3,15} < \frac{20\,000}{\pi} < \frac{20\,000}{3,14}.$$

Or une valeur approchée par défaut de $\frac{20\,000}{3,15}$ est 6349,2 et une valeur approchée par excès de $\frac{20\,000}{3,14}$ est 6369,5.

Tout ce que l'on peut affirmer est donc que l'on a pour le rayon R de la terre exprimé en kilomètres

$$6349,2 < R < 6369,5$$

On peut donner le résultat sous la forme $6,36.10^3$ qui est une valeur approchée de R avec une erreur inférieure à 11 km.

(Sachant d'ailleurs que π est plus proche de 3,14 que de 3,15, on peut affirmer, sans faire le calcul avec une valeur approchée plus précise de π, que l'erreur est certainement inférieure à 10 km, et que $6,36.10^3$ est très vraisemblablement une valeur approchée par défaut.)

Il est certain, en tout cas, que donner le résultat sous la forme 6349,2 ou 6369,5 n'est pas recommandable puisque l'on a lieu de penser que les derniers chiffres écrits n'apportent aucune information valable Par contre ceux de $6,36.10^3$, que l'on qualifie souvent de chiffres significatifs, donnent ce que l'on connaît du nombre R : le premier 6 et le 3 sont certainement exacts; dans une valeur plus approchée de R, le second 6 risque d'être remplacé par un 5

Refaire ces calculs avec $3,1415 < \pi < 3,1416$.

10. 3 OPÉRATIONS SUR DES VALEURS APPROCHÉES

a) Incertitude sur une somme.

Soient deux nombres réels x et y connus chacun par un encadrement On a

$$a < x < a + h, \quad b < y < b + k$$

d'où $a + b < x + y < a + b + h + k$; $a + b$ est donc une valeur approchée de $x + y$ et l'incertitude sur $x + y$ est $h + k$, somme des incertitudes sur x et sur y.

Remarquons qu'à tout encadrement $a < x < a + h$ correspond un encadrement de $-x$, on a, en effet, $-(a + h) < -x < -a$ pour lequel l'incertitude est la même.

On peut donc conclure :

L'incertitude sur une somme de nombres réels ou de leurs opposés est la somme des incertitudes associées à chacun d'eux.

Il y a donc une perte de précision

b) Incertitude sur un produit.

Soient x et y deux nombres réels *positifs*, encadrés par des nombres réels *positifs*

$$a < x < a + h, \quad b < y < b + k$$

On en déduit $ab < xy < ab + bh + ak + hk$.

ab est une valeur approchée par défaut, et l'incertitude est $bh + ak + hk$; elle dépend non seulement des incertitudes sur x et y, mais des valeurs approchées a et b

Il est commode à ce propos d'écrire les encadrements sous la forme

$$a < x < a(1+\varepsilon), \qquad b < y < b(1+\eta)$$

où $\varepsilon = \frac{h}{a}$ et $\eta = \frac{k}{b}$ peuvent être *appelés incertitudes relatives* et seront toujours pratiquement entre 0 et 1. Dans ces conditions, on a

$$ab < xy < ab(1+\varepsilon+\eta+\eta\varepsilon).$$

L'incertitude relative sur le produit est $\varepsilon + \eta + \varepsilon\eta$. Dans la pratique, ε et η sont « petits » et $\varepsilon\eta$ est « négligeable ». Par exemple, si $\varepsilon = \eta = 10^{-3}$ on a $\varepsilon\eta = 10^{-6}$, et il est raisonnable de considérer que l'incertitude relative sur le produit est alors $2 \,.\, 10^{-3}$.

REMARQUE

Si x et y ne sont pas tous deux positifs, on applique les considérations précédentes aux valeurs absolues de x, y et xy.

c) Incertitude sur l'inverse.

Supposons x positif, encadré par a et $a(1+\varepsilon)$ avec $0 < a$.

On a $a < x < a(1+\varepsilon)$, on en déduit $\frac{1}{a(1+\varepsilon)} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$. Mais on peut remarquer que $1 - \varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon}$ (car $1 - \varepsilon^2 < 1$), et que l'on peut écrire

$$\frac{1}{a}(1-\varepsilon) < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$$

ou encore, en posant $b = \frac{1}{a(1+\varepsilon)}$, $b < \frac{1}{x} < b(1+\varepsilon)$.

Ce qui prouve que l'incertitude relative sur $\frac{1}{x}$ est la même que l'incertitude sur x.

REMARQUE

Le résultat précédent concerne l'incertitude relative. Il faut noter que si x est voisin de 0, l'incertitude sur $\frac{1}{x}$ peut être considérable. Si l'on sait que $10^{-6} < x < 2 \,.\, 10^{-6}$, $\frac{1}{x}$, lui, est compris entre $5 \,.\, 10^5$ et 10^6.

Calculer les incertitudes avec lesquelles on connaît π lorsque l'on prend pour valeur approchée de π l'une des valeurs suivantes $\frac{22}{7}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{10}$.

10. 4 VALEURS APPROCHÉES USUELLES

Nous nous proposons de trouver des valeurs approchées des nombres $(1+x)^2$, $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ de la forme $1 + kx$, k étant un nombre réel ne dépendant pas de x, lorsque $|x|$ est « petit ». Non précisée, la dernière locution n'a pas de sens; c'est pour cela que nous avons mis le mot « petit » entre guillemets; dans certaines situations, on aura $|x| < \frac{1}{10}$, dans d'autres $|x| < \frac{1}{1\,000}$ etc. En tout état de cause

nous supposerons toujours que $|x| < \frac{1}{2}$; dans ce cas l'erreur commise dans les approximations que nous allons faire est toujours inférieure à $2x^2$; nous le démontrerons dans certains cas, nous l'admettrons dans les autres cas.

a) Valeurs approchées de $(1+x)^2$ et $\sqrt{1+x}$.

Nous avons

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

Le nombre $1 + 2x$ est une valeur approchée par *défaut* de $(1+x)^2$, l'erreur est x^2. Si $|x| < \frac{1}{10}$ l'erreur est inférieure à $\frac{1}{100}$, si $|x| < \frac{1}{100}$ l'erreur est inférieure à $\frac{1}{10\,000}$, etc.

Nous dirons dans ces conditions que les nombres $(1+x)^2$ et $1 + 2x$ sont peu différents; nous écrirons

$$\boxed{(1+x)^2 \simeq 1 + 2x}$$

qui se lit : « $(1+x)^2$ *est peu différent de* $1 + 2x$ ».

Nous pouvons penser que si les deux nombres *positifs* $1 + 2y$ et $(1+y)^2$ sont peu différents alors il en est de même de $\sqrt{1+2y}$ et $1 + y$. En posant $2y = x$ nous aurons

$$\boxed{\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}}$$

Le nombre $1 + \frac{x}{2}$ est une valeur approchée par *excès* de $\sqrt{1+x}$, en effet on a

$$1 + x < 1 + x + \frac{x^2}{4} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

EXERCICE 1

On pose

$$1 + \frac{x}{2} = \sqrt{1+x} + e$$

($e > 0$); montrer que e est racine du trinôme f défini pour tout nombre réel u par

$$f(u) = u^2 - (x+2)\,u + \frac{x^2}{4}$$

Calculer $f\left(\frac{x^2}{8}\right)$ et $f(2)$. En déduire que pour x *positif* on a $e < \frac{x^2}{8}$.

Nous admettrons que pour x négatif tel que $|x| < \frac{1}{2}$ on a $e < \frac{x^2}{4}$.

b) Valeur approchée de $\frac{1}{1+x}$.

Nous avons

$$1 - x^2 = (1-x)(1+x)$$

ou encore

$$1 = (1-x)(1+x) + x^2$$

d'ou

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}.$$

Le nombre $1 - x$ est donc une valeur approchée par *défaut* de $\frac{1}{1+x}$, l'erreur est $\frac{x^2}{1+x}$; si x est positif cette erreur est inférieure à x^2; si x est négatif et tel que $|x| < \frac{1}{2}$ cette erreur est inférieure à $2x^2$. Nous écrirons

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \sim 1 - x}$$

c) Valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Le nombre $1 + \frac{x}{2}$ est peu différent de $\sqrt{1+x}$, nous pouvons penser que $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ est peu différent de $\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$ qui est peu différent de $1 - \frac{x}{2}$. Nous admettrons que l'on a

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq 1 - \frac{x}{2}}$$

et que l'erreur est inférieure à $\frac{3x^2}{8}$ si x est positif et à $\frac{3x^2}{4}$ si $-\frac{1}{2} < x < 0$

EXERCICE 2

Démontrer que $1 - \frac{x}{2}$ est une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

d) Conclusion.

Nous voyons que si pour tout nombre réel $a > 0$ on pose

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}}$$

nous aurons pour $|x|$ « petit » et pour $\alpha \in \left\{2, -2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

$$\boxed{(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x}$$

1. $\sqrt{97} = \sqrt{100-3} = 10\sqrt{1-3.10^{-2}} \simeq 10(1-1{,}5.10^{-2}) = 10 - 0{,}15 = 9{,}85.$

2. $\frac{1}{\sqrt{10016}} = \frac{1}{100\sqrt{1+16.10^{-4}}} \simeq 10^{-2}(1-8.10^{-4}) = 10^{-2} - 8.10^{-6} = 0{,}009992.$

10. 5 USAGE DES TABLES NUMÉRIQUES

a) Introduction.

Soit f une fonction numérique, application d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction est déterminée si on connaît $f(x)$ pour tout x de D. Dans la pratique il nous suffira de connaître pour chaque x de D une valeur approchée décimale y_1 de $y = f(x)$.
Une table de la fonction f consiste à donner les valeurs approchées à 10^{-p} près pour les valeurs

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

de x, ces valeurs vérifiant $[x_1, x_n] \subset$ D. Dans la pratique vous utiliserez des tables où $p = 4$ (ou 5). On dit que ce sont des tables à 4 (ou 5) décimales. Quant aux valeurs x_1, x_2,..., on prend en général des entiers consécutifs ou des nombres décimaux, à k décimales, consécutifs

Nous allons d'abord décrire la structure des tables, nous indiquerons ensuite comment la table d'une fonction f permet de calculer une valeur approchée y_1 de $f(x)$ pour $n < x < n + 1$ à l'aide des valeurs approchées de $f(n)$ et $f(n+1)$ données par la table.

b) Structure d'une table.

Les plus simples consistent à écrire les valeurs entières consécutives de x dans une première colonne et en regard, dans une deuxième colonne les valeurs correspondantes, exactes ou approchées de $f(x)$.

Exemple : la table 1, à la fin du livre, donne conjointement les valeurs de x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $1/x$ pour les entiers de 1 à 99.
Le plus souvent on procède comme à la table 2 donnant les valeurs de x^2 de 1 à 499 : dans la première colonne on écrit uniquement le nombre des dizaines du nombre x et sur la première ligne les chiffres de 0 à 9. Le carré de 274 par exemple se trouve à l'intersection de la ligne marquée 27 (sur la première colonne) et de la colonne marquée 4 (sur la première ligne).
Il est rare qu'une table donne les valeurs exactes de $f(x)$: c'est le cas cependant des tables des fonctions $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$ (cf. table 1 et table 2); la table donne en général une valeur approchée décimale; ainsi la table 1, pour les fonctions $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto 1/x$, donne des valeurs approchées par défaut à 10^{-4} près.
Très souvent on utilise pour les tables à p décimales la règle suivante que nous exposons pour $p = 4$. Soit

$$f(x) = 3{,}4734\,a\ \dots$$

si $a < 5$ on écrit dans la table 3, 4734,
si $a \geqslant 5$ 3, 4735.
Naturellement pour 2, 7429 a..., si $a \geqslant 5$, c'est le nombre 2,7430 qui est écrit dans la table. Avec cette règle l'erreur commise est toujours inférieure à $\frac{1}{2}10^{-4} = 5.10^{-5}$. Mais avec cette pratique *on ne connaît pas le sens de l'approximation* car si $a < 5$ la valeur écrite dans la table est une valeur approchée par *défaut* à 5.10^{-5} près et si $a \geqslant 5$ c'est une valeur approchée par excès à 5.10^{-5} près Certaines tables remédient à cet inconvénient en indiquant par un signe spécial les valeurs approchées par excès.

c) Interpolation linéaire.

Supposons d'abord pour simplifier que les valeurs inscrites dans la table sont des valeurs exactes.

Nous nous proposons de calculer $f(x)$ pour x tel que

$$n < x < n + 1$$

à l'aide de $f(n)$, $f(n+1)$, x et n. Le procédé consiste à remplacer dans l'intervalle $[n, n+1]$ la fonction f par une *fonction affine* g telle que

$$g(n) = f(n) \quad \text{et} \quad g(n+1) = f(n+1)$$

Calculons $g(x)$, nous savons qu'il existe un nombre réel a tel que, quels que soient $x_1 \neq x_2$ de $[n, n+1]$, on ait

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Nous avons donc

$$\frac{g(x) - g(n)}{x - n} = \frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n} = f(n+1) - f(n),$$

d'où

$$g(x) = f(n) + (x - n)[f(n+1) - f(n)].$$

Le remplacement de $y = f(x)$ par $y_1 = g(x)$ est appelé **interpolation linéaire.** Sur la figure 1 l'erreur commise est représentée par $\overline{M_1M}$; vous apprendrez plus tard à calculer un majorant de $|f(x) - g(x)|$ dans $[n, n+1]$

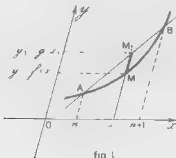


fig 1

EXEMPLE

1. Soit à calculer $(34,2)^3$. On a (cf. table 1)

$$g(34) = f(34) = 39\,304$$
$$g(35) = f(35) = 42\,875$$
$$f(n+1) - f(n) = 3\,571 \qquad x - n = 0,2$$

d'où $\quad g(x) - g(n) = 0,2 \times 3\,571 = 714,2$

$$g(x) = 39\,304 + 714,2 = 40\,018,2$$

Donc $\quad (34,2)^3 \simeq 40\,018,2$

EXERCICE

La valeur exacte de $(34,2)^3$ est 40 001,688. Calculer un majorant de l'erreur absolue et de l'erreur relative dans le calcul précédent

Les fonctions classiques que vous aurez à utiliser sont strictement monotones dans les intervalles considérés ; dans le calcul précédent il faudra faire attention au sens de variation : ainsi pour des calculs en grades les fonctions sinus et tangente sont strictement croissantes pour $0 \leqslant x \text{ gr} < 50$ et les fonctions cosinus et cotangente sont strictement décroissantes pour $0 < x \text{ gr} < 50$.

REMARQUES

1. Le nombre $\dfrac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n} = f(n+1) - f(n)$ est le coefficient directeur de la droite (AB) (fig. 1) ; ce nombre est appelé **différence tabulaire** de f dans $[n, n+1]$.
2. Naturellement si la table donne les valeurs de $f(x)$ pour des valeurs non entières α, β, ... on aura

$$\frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

La fonction f étant supposée strictement monotone l'interpolation linéaire permet, connaissant le nombre y, de trouver une valeur approchée x_1 de x telle que $y = f(x)$. Supposons f *strictement croissante* ; si la table contient les valeurs de f pour $x = 1, 2..., 99$ on aura $f(1) < f(99)$. Considérons un nombre y de $[f(1), f(99)]$; si ce nombre figure dans la table on aura $f(n) = y$ d'où $x = n$, car une fonction strictement monotone est injective. La plupart du temps on trouvera n tel que

$$f(n) < y < f(n+1).$$

La méthode consiste à prendre pour valeur approchée x_1 de x tel que $f(x) = y$ le nombre x_1 tel que $g(x_1) = y$; la formule (1) devient

$$\text{(2)} \qquad \frac{g(x_1) - g(n)}{x_1 - n} = f(n+1) - f(n)$$

d'où, comme $g(x_1) = y$ et $g(n) = f(n)$

$$x_1 - n = \frac{y - f(n)}{f(n+1) - f(n)}.$$

Sur la figure 2 l'erreur commise est représentée par $\overline{M_1M}$; vous apprendrez plus tard à calculer un majorant de $|x - x_1|$ dans $[n, n+1]$.

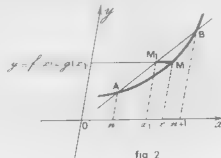


fig 2

EXEMPLE

2. Soit à calculer $\sqrt{82\,541}$, on a (table 2)

$$(287)^2 = 82\,369 \quad \text{et} \quad (288)^2 = 82\,944$$

D'où

$$\frac{82\,541 - 82\,369}{x_1 - 287} = 82\,944 - 82\,369 = 575$$

$$x_1 - 287 = \frac{172}{575} \simeq 0{,}29$$

$$x \sim 287{,}29$$

Remarquons que l'on pourrait prendre $\frac{172}{287}$ avec davantage de décimales; lorsque vous saurez calculer un majorant de $|x - x_1|$ vous constaterez que prendre davantage de chiffres pour $\frac{172}{287}$ serait illusoire (cf. § 10.2).

La quasi totalité des tables donnent seulement une valeur approchée de $f(n)$; dans l'interpolation linéaire il y a deux sources d'erreurs :
1. Les erreurs dues à la table : on fait des calculs sur des valeurs approchées de $f(n)$ et $f(n+1)$.
2. L'erreur due au principe de l'interpolation linéaire . dans l'intervalle $[n, n+1]$ on remplace la fonction f par la fonction affine g.

Les tables sont conçues de manière que la deuxième erreur soit négligeable devant la première. Ainsi, si la table est à 4 décimales, *le nombre $f(x)$, qu'il figure ou non dans la table est connu avec une incertitude égale à $5 \cdot 10^{-5}$.*



II. Règle à calcul

10. 6 PRINCIPE DE LA RÈGLE A CALCUL

Rappelons que nous avons admis dans le cours de Seconde (cf. tome 1 page 131) l'existence d'une bijection φ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ (appelée *fonction logarithmique* de base 10) possédant les deux propriétés suivantes

1. Pour tout x et tout y de $\mathbb{R}_+^*$ on a

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

2. $\varphi(10) = 1$

La bijection φ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$, on a donc $\varphi(1) = 0$.
On en déduit les règles suivantes que nous utiliserons pour calculer avec une règle à calcul

(1) $$\varphi(x \times y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Calculons $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Posons $\frac{x}{y} = z$, soit $x = yz$; d'après (1) on a

$$\varphi(x) = \varphi(y) + \varphi(z)$$

d'où

(2) $$\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \varphi(x) - \varphi(y)$$

Et encore (en utilisant exceptionnellement le symbole de division : pour éviter la superposition de traits de fractions)

(3) $$\varphi(x \times y) = \varphi\left(x : \frac{1}{y}\right) = \varphi(x) - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)$$

(4) $$\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \varphi\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{y}\right)$$

Remarquons que la règle à calcul permet seulement de trouver les chiffres significatifs d'un produit ou d'un quotient de deux ou plusieurs nombres. *L'ordre de grandeur du résultat n'est pas obtenu par lecture sur la règle*, mais par calcul approché direct; on remplace les nombres donnés par des nombres plus simples pour pouvoir situer le nombre N cherché entre deux puissances successives de 10 : $10^n \leqslant N < 10^{n+1}$. N s'écrira alors : $N = a \times 10^n$, où $1 \leqslant a < 10$. *La règle à calcul permet seulement la détermination de a.*

En classe de Seconde, une méthode de calcul a été indiquée pour le calcul des produits et des quotients. Nous allons présenter à titre de complément une autre méthode qui évite le déplacement de la réglette mobile vers la gauche et qui est donc plus rapide puisque la main gauche tient la règle pendant que la main droite seule assure le déplacement de la réglette mobile.

10. 7 PRÉSENTATION DE L'ÉCHELLE DES INVERSES

L'échelle située sur la réglette mobile et nommée a s'appelle échelle des inverses. Elle est identique aux échelles de base B ou b de la règle, mais les nombres sont indiqués en croissant de la droite vers la gauche, au lieu d'être marqués en croissant de la gauche vers la droite Il est important de bien observer cette propriété de la graduation pour ne pas faire d'erreurs de lecture.

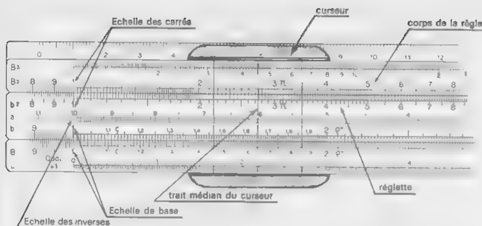


fig. 3

Comme son nom l'indique, cette échelle permet de faire une lecture directe de l'inverse d'un nombre deux nombres placés suivant le trait médian du curseur, l'un sur l'échelle *a*, l'autre sur l'échelle *b* sont inverses.

Par exemple, en face de 4 de l'une des échelles, on lit 25 sur l'autre $\left(\frac{1}{4} = 0{,}25\right)$, en face de 2, on lit 5 $\left(\frac{1}{2} = 0{,}5\right)$, etc.

10. 8 OPÉRATIONS

a) Multiplication.

Exemple 1. Soit à calculer N = 2 × 3. On utilise le résultat (1).
Sur l'échelle marquée B, on repère « 2 ». On place le « 1 » de l'échelle *b* en face de ce « 2 » et on repère avec le trait du curseur le « 3 » de l'échelle *b*. Le résultat se lit directement sur l'échelle B : N = 6.



fig 4 $\varphi(2 \times 3) = \varphi(2) + \varphi(3)$

Dans le cas général, on a le schéma suivant, pour N = $x \times y$:

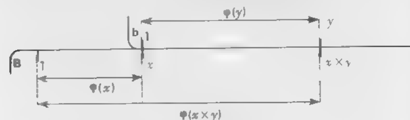


fig. 5 (1) $\varphi(x \times y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

Ce mode de calcul n'est pas toujours possible, par exemple pour N = 3 × 4 (voir exemple 2).

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

x	y	$x \times y$	x	y	$x \times y$
15,8	3,1	4,9 × 10	8,02	11,1	8,9 × 10
134	0,57	7,63 × 10	4,28	14,8	6,33 × 10
1,23	4,3	5,29	17,05	0,179	3,05
40,5	1,63	6,60 × 10	133,5	0,336	4,48 × 10
61,5	1,26	7,75 × 10	2,47	2290	5,66 × 10^3

Exemple 2 : Soit à calculer N = 3 × 4.
La méthode précédente n'est pas applicable, puisque, si l'on met bout à bout les segments correspondant à φ (3) et φ (4), on obtient φ (3) + φ (4) à l'extérieur de la règle. On utilise la règle (3) :



fig. 6 $\varphi(4 \times 3) = \varphi\left(4 : \frac{1}{3}\right) = \varphi(4) - \varphi\left(\frac{1}{3}\right)$

Sur l'échelle B, on repère « 4 », à l'aide du trait du curseur. Sur ce trait du curseur, on indique « 3 » de l'échelle des inverses (il correspond à $\frac{1}{3}$ de l'échelle *b*). En face du « 1 » de l'échelle *b* on lit le résultat « 12 ».

De façon plus générale, on a le schéma suivant :

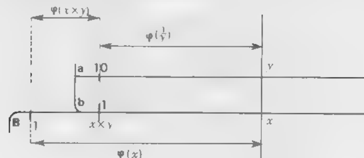


fig. 7 (3) $\varphi(x \times y) = \varphi(x : \frac{1}{y})$ $\varphi(x)$ $\varphi(\frac{1}{y})$

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

x	y	$x \times y$	x	y	$x \times y$
7,5	4,1	$3{,}07 \times 10$	41,7	0,763	$3{,}18 \times 10$
5,45	37	$2{,}02 \times 10^2$	572	0,0269	$1{,}540 \times 10$
31,3	0,465	$1{,}445 \times 10$	5,58	0,732	4,08
5,05	2,21	$1{,}115 \times 10$	885	0,00251	2,22
3,73	0,343	1,28	9550	0, 279	$2{,}66 \times 10^3$

REMARQUE

Une multiplication étant à effectuer, une et une seule des deux méthodes précédentes est toujours applicable.

b) Division.

Exemple 1. Soit à calculer $N = \frac{48}{3}$.

On utilise la règle (2).

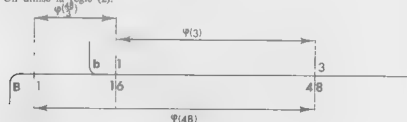


fig.8 $\varphi(\frac{48}{3}) - \varphi(48) - \varphi(3)$

Suivant le trait du curseur, on affiche « 48 » de l'échelle B et « 3 » de l'échelle b. On lit le résultat sur l'échelle B en face du « 1 » de l'échelle b.

De façon générale, on a le schéma suivant :

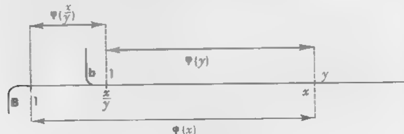


fig.9 (2) $\varphi(\frac{x}{y}) = \varphi(x) - \varphi(y)$

Ce principe de calcul n'est pas toujours possible, par exemple pour N = 42 : 7 (voir exemple 2)

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

x	y	$x : y$	x	y	$x : y$
0,381	21,8	$1{,}745 \times 10^{-2}$	68	38,9	1,745
36,6	1,18	$3{,}10 \times 10$	0,535	225	$2{,}38 \times 10^{-3}$
5,13	13,75	$3{,}73 \times 10^{-1}$	3,37	199,5	$1{,}69 \times 10^{-2}$
0,895	0,0257	$3{,}48 \times 10$	271	0,1215	$2{,}23 \times 10^3$
6,05	458	$1{,}32 \times 10^{-2}$	0,722	243	$2{,}97 \times 10^{-3}$

Exemple 2. Calcul de N = 42 : 7.

On utilise la règle (4).

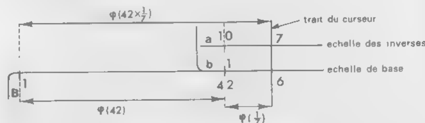


fig 10 $\varphi(\frac{42}{7}) - \varphi(42 \times \frac{1}{7}) - \varphi(42) + \varphi(\frac{1}{7})$

En face de la graduation « 42 » de l'échelle B, on place le « 10 » de l'échelle des inverses. Puis l'on repère avec le trait du curseur le « 7 » de l'échelle b des inverses et on lit le résultat en face de ce trait du curseur sur l'échelle B

Ce type de calcul se généralise avec le schéma suivant.

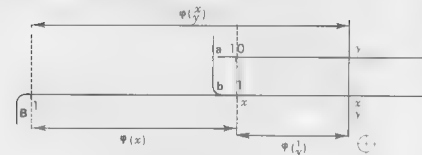


fig. 11 (4) $\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \varphi\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{y}\right)$

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

x	y	$\frac{x}{y}$	x	y	$\frac{x}{y}$
14,15	0,255	$5{,}55 \times 10$	0,235	4,35	$5{,}40 \times 10^{-2}$
2,43	81,5	$2{,}98 \times 10^{-2}$	47,2	51,3	$9{,}21 \times 10^{-1}$
87,2	0,925	$9{,}42 \times 10$	51,3	0,627	$8{,}19 \times 10$
4,35	0,0743	$5{,}85 \times 10$	0,632	0,0815	7,75
182,5	0,375	$4{,}86 \times 10^{2}$	0,0915	0,985	$9{,}28 \times 10^{-2}$

REMARQUE

Une division étant à effectuer, une et une seule des deux méthodes précédentes est toujours applicable.

III. Logarithmes décimaux

Le contenu de cette section ne figure qu'au programme de **Première E.**

10. 9 PROPRIÉTÉS DES LOGARITHMES DÉCIMAUX (RAPPELS)

Nous avons admis en Seconde qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ telle que

1. Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ et tout y de $\mathbb{R}_+^*$ on a

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

2. $\varphi(10) = 1$.

Cette fonction est appelée **fonction logarithmique de base 10;** le nombre $\varphi(x)$ s'écrit *log x*, il est appelé **logarithme décimal** de x.

La fonction logarithmique de base 10 est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$ on a donc

$$\log 1 = 0.$$

D'autre part nous avons démontré en Seconde les résultats suivants (cf. tome 2, p. 83) :

Théorème.

Quels que soient les nombres réels x, y, z, t strictement positifs et quel que soit le nombre rationnel r on a

$$\log(xyzt) = \log x + \log y + \log z + \log t,$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y,$$

$$\log x^r = r \log x.$$

EXEMPLES

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\log x^n = n \log x$; en particulier $\log 10^n = n$.
2. $\log x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log x$.
3. $\log x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2} \log x$.

10. 10 UTILISATION D'UNE TABLE DE LOGARITHMES

a) Caractéristique et mantisse d'un logarithme décimal.

Soit x un nombre réel > 0, il existe un entier relatif unique n tel que $10^n \leqslant x < 10^{n+1}$; il existe donc un nombre réel $x' > 0$ tel que

$$x = 10^n x' \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant x' < 10$$

d'où

$$\log x = \log 10^n + \log x' = n + \log x'$$

avec

$$0 < \log x' < 1.$$

Par exemple :

$$\log 516 = \log(10^2 \times 5{,}16) = 2 + \log 5{,}16$$
$$\log 516000 = \log(10^5 \times 5{,}16) = 5 + \log 5{,}16$$
$$\log 0{,}00516 = \log(10^{-3} \times 5{,}16) = -3 + \log 5{,}16$$

Le nombre n est appelé la **caractéristique** de $\log x$.
Si $x \geqslant 1$, la caractéristique est le nombre de chiffres, diminué de 1, de la partie entière de x écrit dans le système décimal.
Si $0 < x < 1$ la caractéristique est un entier strictement négatif, sa valeur absolue est le rang du premier chiffre non nul situé après la virgule dans l'écriture décimale de x.

Lorsque la caractéristique est négative au lieu d'écrire $n = -n'$ on l'écrit $\overline{n'}$; ainsi la caractéristique de log 0,00516 est $\overline{3}$.

Le nombre $\log x'$ est appelé la **mantisse** de $\log x$, c'est un **nombre positif strictement inférieur à 1** car $1 \leqslant x' < 10$.
Ainsi tous les nombres qui, dans leur écriture décimale, ne diffèrent que par la place de la virgule ou par le nombre de 0 mis après le dernier chiffre significatif ont *même mantisse*.

La mantisse seule est donnée par la table. Ainsi à $5 \cdot 10^{-5}$ près on a

$$\log 516 = 2{,}7126,$$
$$\log 516\,000 = 5{,}7126,$$
$$\log 0{,}00516 = \bar{3}{,}7126,$$

le symbole $\bar{3}{,}7126$ signifiant $(-3) + 0{,}7126$.

b) Table de logarithmes.

Comme tous les nombres de la forme $10^n a$ ont même mantisse, une table de logarithme donne les valeurs approchées des mantisses des logarithmes décimaux des nombres entiers 1 à 10^n.

Nous allons décrire la table donnée à la fin du livre (table 5); elle donne la valeur approchée à $5 \cdot 10^{-5}$ près de la mantisse des logarithmes des nombres entiers de 100 à 1 000. On dit que c'est une *table à 4 décimales*.

REMARQUE 1

Nous avons dit qu'une table numérique d'une fonction f était conçue de manière que l'erreur sur $f(x)$, lorsque $n < x < n+1$, due à l'interpolation linéaire était négligeable par rapport à l'erreur due à la table ($f(n)$ indiquée par la table est une valeur approchée). Il en résulte qu'il y a un lien entre la précision donnée par la table et l'amplitude de celle-ci. Ainsi les tables de logarithmes à 5 décimales donnent les logarithmes des nombres de 1 000 à 10 000

La table est disposée en colonnes : la première colonne donne le nombre des dizaines de x ensuite sur la première ligne on lit le nombre des unités de x (cf. § 10. 5 *b*).

En fait à l'intersection de la ligne des dizaines de x et de la colonne des unités de x on ne lit pas une valeur approchée de la mantisse mais cette valeur approchée multipliée par 10^4. Ainsi pour $x = 516$ à l'intersection de la ligne 51 (lu dans la première colonne) et de la colonne 6 (lu dans la première ligne) on trouve 7 126; la mantisse est donc 0,7126, donc

$$\log 516 = 2{,}7126.$$

Le premier chiffre de la mantisse (multipliée par 10^4), ici 7, reste le même pour plusieurs nombres consécutifs, il n'est pas répété; il faut alors le chercher dans une ligne antérieure; ainsi pour 563 à l'intersection de la ligne 56 et de la colonne 3 on lit 505, deux lignes au-dessus on voit que le premier chiffre est 7, la mantisse est donc 0,7505.

Cherchons enfin la mantisse de log 258; à l'intersection de la ligne 25 et de la colonne 8 nous lisons 116*, l'étoile indique qu'il faut aller chercher le premier chiffre de la mantisse dans la *ligne suivante*, ce chiffre est donc un 4, et nous avons

$$\log 258 = 2{,}4116.$$

c) Recherche du logarithme d'un nombre.

Nous savons trouver la caractéristique (cf. 10. 10 a).

Si le nombre x a au plus trois chiffres significatifs on peut lire la mantisse dans la table.

Exemple 1. Soit $x = 74{,}8$, la mantisse de log 74,8 est la même que celle de log 748; pour 748 nous lisons dans la table 8739 donc

$$\log 74{,}8 = 1{,}8739$$

Exemple 2. Soit $x = 0{,}0017$, la mantisse de log 17 est celle de log x; nous lisons dans la table 2304 donc

$$\log 0{,}0017 = \bar{3}{,}2304.$$

Si le nombre x a plus de trois chiffres significatifs il faut procéder par *interpolation linéaire :*

Exemple 3. Soit $x = 2\,357$; la mantisse de log 2357 est la même que celle de log 235,7. On lit dans la table :

	pour 236	3729
	pour 235	3711
d'où		$\Delta = 18$

En fait ce nombre $\Delta = 18$ est improprement appelé **différence tabulaire**, car la différence tabulaire est

$$\log 236 - \log 235 = 18 \times 10^{-4}.$$

C'est-à-dire on calcule sur des unités qui valent 10^{-4}. Pour 0,7 nous aurons une correction égale à

$$\Delta \times 0{,}7 = 18 \times 0{,}7 = 12{,}6$$

il s'agit en fait de $12{,}6 \times 10^{-4}$ à ajouter à log 235

On peut présenter le calcul de la façon suivante

log 2 350 = 3,3711		
pour 7	12,6	$\Delta = 18$
	3,37236	
log 2 357 = 3,3724		

Dans le résultat définitif on a « forcé » la 4e décimale car la 5e est un $6 \geqslant 5$.

Exemple 4. Soit $x = 0{,}09363$. Nous obtenons

log 0,0936 = $\bar{2}{,}9713$		
pour 3	1,2	$\Delta = 4$
	$\bar{2}{,}97142$	
log 0,09363 = $\bar{2}{,}9714$		

d) Recherche d'un nombre dont le logarithme est connu.

La mantisse de log x va nous permettre de trouver les chiffres significatifs de x à l'aide de la table; ensuite la caractéristique nous permettra de déterminer complètement x.

Si la mantisse est dans la table nous avons les chiffres significatifs par simple lecture.

Exemple 5. Soit $\log x = 5{,}4014$.

Pour la mantisse 4 014 on lit dans la table 252, d'où, la caractéristique étant 5,

$$\log x = 5{,}4014 \longmapsto x = 252\,000$$

Exemple 6. Soit $\log x = \bar{3},6866$.
Pour la mantisse 6866 on lit dans la table 486, d'où, la caractéristique étant $\bar{3}$,

$$\log x = \bar{3},6866 \longmapsto x = 0,00486.$$

Si la mantisse n'est pas dans la table il faut procéder par interpolation linéaire.

Exemple 7 Soit $\log x = 1,5241$
Dans la table on lit pour les mantisses

$$5237 < 5241 < 5250$$

On a donc

$$\Delta = 5250 - 5237 = 13$$
$$d = 5241 - 5237 = \ 4$$

Le nombre 5237 est la mantisse de 334, par interpolation linéaire on voit que 5241 est la mantisse de

$$334 + \frac{4}{13} = 334 + 0,30 = 334,3.$$

La caractéristique 1 nous permet d'écrire

$$x = 33,43.$$

On peut présenter le calcul de la façon suivante

$\log x = 1,5241$				
5237	....	334	Δ	13
4	$\frac{4}{13}$	0,30		
5241	....	334,3		
	x	33,43		

REMARQUE 2

Dans tous ces calculs nous utilisons traditionnellement le signe « égal » entre les nombres écrits, en fait il serait plus correct d'écrire le signe $\sim$.

10. 11 CALCULS LOGARITHMIQUES

a) Introduction.

L'utilisation des logarithmes permet de ramener le calcul d'un nombre tel que

$$x = \frac{ab^r}{c},$$

où a, b, c sont des nombres strictement positifs et r un nombre rationnel, au calcul de

$$\log x = \log a + r \log b - \log c.$$

La seule difficulté provient du fait que pour trouver x connaissant $\log x$ il faut mettre $\log x$ sous la forme : *caractéristique + mantisse*, la mantisse m étant telle que $0 \leqslant m < 1$.
Pour l'addition aucune difficulté : la somme des mantisses de $\log a$ et $\log b$ donne la mantisse de $\log a + \log b$ avec une retenue, 0 ou 1, qui vient s'ajouter à la somme des caractéristiques, ainsi

$$\begin{array}{rr} \log a = 2,3015 & \log a = 5,4373 \\ \log b = \bar{3},4124 & \log b = \bar{2},7428 \\ \hline \log a + \log b = \bar{1},7139 & \log a + \log b = 4,1801 \end{array}$$

Il n'y a aucune difficulté non plus pour la multiplication d'un logarithme par un entier positif, ainsi

$$\begin{array}{r} \log a = \bar{1},3821 \\ \times 4 \\ \hline 4 \log a = \bar{3},5284 \end{array}$$

car

$$4 \times (\bar{1},3821) = 4 [(-1) + 0,3821] = (-4) + (1,5284) = (-3) + 0,5284.$$

Pour la division d'un logarithme par un nombre entier positif n on procédera comme le montrent les exemples suivants, car en général le quotient de la caractéristique par n n'est pas un entier

$$\frac{1}{2} \log a = \frac{4,4237}{2} = 2,2118$$
$$\frac{1}{5} \log a = \frac{6,3127}{5} = 1,2625$$
$$\frac{1}{3} \log a = \frac{\bar{6},2378}{3} = \bar{2},0793$$
$$\frac{1}{3} \log a = \frac{\bar{2},7439}{3} = \frac{(-2) + 0,7439}{3} = \frac{(-3) + 1,7439}{3}$$
$$= (-1) + 0,5813 = \bar{1},5813.$$

En revanche dans le calcul de $\log a - \log b$ la différence des deux mantisses est un nombre positif ou négatif, l'introduction du cologarithme d'un nombre va nous permettre de mettre $\log a - \log b$ ainsi que celle de $r \log a$ où r est un rationnel négatif sous la forme *caractéristique + mantisse*.

b) Cologarithme d'un nombre.

On appelle **cologarithme** d'un nombre le **logarithme** de son **inverse**.
Le cologarithme de x s'écrit colog x ; on a

$$\operatorname{colog} x = \log \frac{1}{x} = \log 1 - \log x = -\log x$$

Le *cologarithme* d'un nombre est donc l'*opposé* de son *logarithme.*
Connaissant $\log x$ on mettra le nombre colog x sous la forme *caractéristique + mantisse* de la manière suivante.
Soit $\log a = 3,2742$, on a

$$\operatorname{colog} a = -(3 + 0,2742) = -3 - 0,2742$$
$$= -3 - 1 + (1 - 0,2742) = \bar{4},7258.$$

Soit $\log a = \bar{4},3127$, on a

$$\operatorname{colog} a = -(-4 + 0,3127) = +4 - 0,3127$$
$$4 \quad 1 + (1 \quad 0,3127) = 3,6873.$$

Soit $\log a = 0{,}3470$, on a

$$\operatorname{colog} a = \quad (0{,}3470) = -1 + (1 - 0{,}3470) - 1{,}6530$$

Autrement dit :

La caractéristique de colog x s'obtient en ajoutant 1 à la caractéristique de log x et en changeant le signe du résultat,
la mantisse de colog x est le complément à 1 de la mantisse de log x, on l'obtient en retranchant chaque chiffre de la mantisse de log x de 9 sauf le dernier chiffre significatif que l'on retranche de 10

Soit à calculer $\log a \quad \log b$; nous mettons $\operatorname{colog} b$ sous la forme *caractéristique + mantisse*, nous pourrons alors sans difficulté mettre

$$\log a - \log b \ \ \log a + \operatorname{colog} b$$

sous la forme *caractéristique + mantisse.*

Il en sera de même pour $r \log a$ lorsque r est négatif, on aura :

$$r \log a = \log a^r = \operatorname{colog} a^{-r} = (-r) \operatorname{colog} a,$$

où $-r$ est positif.

c) Exemple de calcul logarithmique.

Soit à calculer

$$x = \frac{34{,}38\ \sqrt[3]{0{,}175}}{0{,}428}$$

Nous avons

$$\log x = \log 34{,}38 + \frac{1}{3} \log 0{,}175 - \log 0{,}428$$

$$= \log 34{,}38 + \frac{1}{3} \log 0{,}175 + \operatorname{colog} 0{,}428.$$

On peut disposer le calcul de la manière suivante

Calculs auxiliaires		*Calculs définitifs*	
$\log 34{,}30 = 1{,}5353$	$\Delta = 13$	$\log 34{,}38 \quad 1{,}5363$	
pour 8 10,4		$\frac{1}{3} \log 0{,}175 = \bar{1}{,}7477$	
$\log 34{,}38 = 1{,}5363$		$\operatorname{colog} 0{,}428 - 0{,}3686$	
		$\log x = 1{,}6526$	
$\log 0{,}175 = \bar{1}{,}2430$		$6522 \ \ldots\ldots\ 449$	$\Delta = 10$
$= \bar{3} + 2{,}2430$		$4 \ \ldots \frac{4}{10} \quad 0{,}4$	
$\frac{1}{3} \log 0{,}175 = \bar{1}{,}7477$		$6526 \ \ldots\ldots\ 449{,}4$	
$\log 0{,}428 \quad \bar{1}{,}6314$			
$\operatorname{colog} 0{,}428 = 0{,}3686$		$x \quad 44{,}94$	

IV. Notions sur les abaques

Le contenu de cette section ne figure qu'au programme de **Première E.**

10.12 INTRODUCTION

Le mot **abaque** (substantif *masculin*) vient du latin *abacus* qui désignait une tablette, ancêtre de notre boulier, permettant d'effectuer certains calculs Le mot abaque désigne aujourd'hui tout graphique permettant de lire certains résultats numériques sans calculs.

a) Exemple d'utilisation d'une courbe unique.

Supposons construite de façon précise sur du papier millimétré la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \frac{36}{x}$ cette courbe a pour équation $y = \frac{36}{x}$ ou encore

$$xy = 36.$$

Cette courbe une fois tracée, ou plutôt son arc correspondant à $0 < a \leqslant x \leqslant b$, permettra de trouver le quotient de 36 par tout nombre réel x compris entre a et b; l'approximation du résultat dépend de la précision avec laquelle a été construite la courbe et de la précision des lectures

b) Exemple d'utilisation d'un réseau de courbes.

Si l'on veut graphiquement trouver le quotient de z par x on sera amené à construire sur un même graphique plusieurs courbes d'équations respectives

(1) $$xy = z$$

où z représente un paramètre La figure 3 représente pour $1 \leqslant x \leqslant 10$ et $1 \leqslant y \leqslant 10$ les arcs des courbes C_z où $z = 5$ puis $z = 10$, $z = 20$, $z = 30$... jusqu'à $z = 90$ Sur une feuille de papier plus grande on pourrait construire — toujours pour x et y compris entre 1 et 10 — davantage d'arcs des courbes C_z. Le point M de l'arc construit de la courbe C_z a ses coordonnées (x, y) qui vérifient $xy = z$.

Sur le graphique de la figure 3 on pourra lire par exemple $\frac{30}{8} \simeq 3{,}7$ ou $3 \times 6{,}7 \simeq 20$.

Cependant si on veut trouver xy, dans la plupart des cas le point M (x, y) ne se trouvera pas sur une courbe C_z; il faudra apprécier à vue la valeur du paramètre z de la courbe Cs qui passerait par M si on l'avait dessinée, par exemple on pourra lire $2{,}4 \times 6{,}3 \simeq 15$

Le réseau de courbes de la figure 12 constitue un **abaque**, abaque très rudimentaire que nous allons transformer pour le rendre plus pratique.

c) Exemple d'utilisation d'échelles non métriques.

Dans la figure 12 l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont gradués à l'aide d'échelles équidistantes, que l'on appelle *échelles métriques*
Prenons les logarithmes décimaux des deux membres de la relation (1) nous avons

(2) $$\log x + \log y = \log z.$$

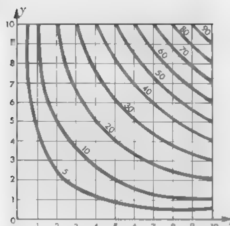


fig.12

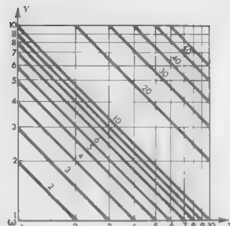


fig.13

Si nous posons $X = \log x$ et $Y = \log y$ nous avons

(2′) $$X + Y = \log z$$

Par rapport aux axes ωX, ωY, (2′) représente une famille de *droites*. Le principe de la méthode consiste, pour le point H de l'axe des abscisses tel que

$$\overline{\omega H} = X = \log x$$

à marquer x et non X, on obtient ainsi une *échelle logarithmique* : vous avez vu de telles échelles sur vos règles à calcul; on procède de même pour l'axe des ordonnées.
Chaque droite ainsi obtenue est repérée de même par z, on obtient ainsi une famille de droites parallèles Δ_z qui constituent l'**abaque** de la figure 13; pour construire cet abaque on trouve dans le commerce du *papier logarithmique* où les échelles des deux axes sont logarithmiques.

La branche des mathématiques appliquées consacrée à l'étude des méthodes de calcul graphique et en particulier à l'étude des abaques est appelée **Nomographie.** L'une des méthodes de cette science consiste à choisir les échelles des axes de manière que les courbes considérées deviennent des droites; cette transformation des courbes par changement des échelles est appelée **anamorphose.**

10. 13 ÉCHELLES FONCTIONNELLES

a) Définitions.

Nous ne parlerons que d'*échelles rectilignes* : sur un axe ωX on considère un ensemble de points M et on associe à chacun d'eux un nombre réel x appelée sa **cote.**
La *différence des cotes* de deux points consécutifs, appelée *échelon*, est en général *constant* : on prendra selon les cas un échelon égal à 1 (cf. fig. 12 et 13) ou égal à 10 ou à 5, etc...

La *différence des abscisses* de deux points consécutifs est le **pas** de l'échelle considérée.

Si ce pas est constant on dit que l'échelle est **métrique;** entre l'abscisse $\overline{\omega M} = X$ de M et sa cote x on a la relation

$$X = \mu x;$$

le nombre réel μ est l'abscisse du point A de cote 1, on dit que c'est le module de l'échelle métrique considérée; sur la figure 14 on a $\mu = 10$ mm

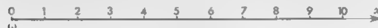


fig 14

Soit maintenant une fonction numérique f que l'on doit utiliser dans la question étudiée pour $a \leqslant x \leqslant b$, nous supposons naturellement que f est définie dans $[a, b]$; si f est strictement monotone sur $[a, b]$, ce qui sera le cas le plus fréquent on aura

$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ si f est strictement croissante,
$f(b) \leqslant f(x) \leqslant f(a)$ si f est strictement décroissante.

Sur un axe ωX on construira les points M d'*abscisses*

$$X = \overline{\omega A} = \mu f(x)$$

mais on attribuera au point M d'*abscisse* $\mu f(x)$ la **cote** x. On obtient ainsi l'**échelle fonctionnelle** de la fonction f (pour $a \leqslant x \leqslant b$).
L'unité de longueur étant choisie, μ est appelé le **module** de l'échelle considérée; on a

$$\mu = \frac{\text{abscisse du point coté } x}{f(x)};$$

si 1 est la cote de l'un des points considérés, μ est l'abscisse de ce point U de cote 1 (fig. 15).

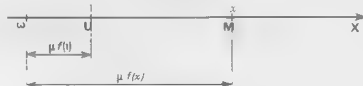


fig.15

REMARQUES

1. La cote de ω est un nombre x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
   L'origine ω de l'axe ne figure donc sur l'échelle construite (pour $a \leqslant x \leqslant b$ et f strictement croissante) que si $x_0 \in [a, b]$
   Dans les mêmes conditions le point U coté 1 ne figure sur l'échelle que si $1 \in [a, b]$.
2. Le module μ dépend de la dimension du papier utilisé et de la valeur de $|f(b) - f(a)|$
   Par exemple si f est strictement croissante et si on veut que l'échelle ait 100 mm entre A et B de cotes respectives a et b nous avons
   $$\overline{\omega A} = \mu f(a), \quad \overline{\omega B} = \mu f(b), \quad \overline{AB} = \mu\,(f(b) - f(a));$$
   on aura donc pour μ (en *millimètres*)
   $$\mu = \frac{100}{f(b) - f(a)}$$
   et ceci, que le point ω appartienne ou non à l'échelle

b) **Exemples.**

Exemple 1. Échelle des *carrés* de $x = 0$ à $x = 10$ avec échelon 1, la longueur de l'échelle étant 100 mm. On a $\mu = \frac{100}{10^2 - 0^2} = 1$ (en mm), ici ω figure dans l'échelle (fig. 16).



fig 16

Exemple 2. Échelle des *inverses* de $x = 1$ à $x = 10$ avec échelon 1; voici figure 17 une échelle des inverses :



fig 17

Trouver à titre d'exercice le module de cette échelle (on utilisera les points de cote 1 et 2).

On remarque que l'origine ω n'est pas un point de l'échelle La relation $\overline{\omega M} = \mu \frac{1}{x}$ montre que $\overline{\omega M}$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$: la cote de ω serait $+\infty$.

Exemple 3. Échelle *logarithmique* de $x = 1$ à $x = 10$ avec échelon 1, la longueur de l'échelle étant 125 mm

On aura (en millimètres)

$$\mu = \frac{125}{\log 10 - \log 1} = \frac{125}{1 - 0} = 125$$



fig 18

Ici l'origine ω est le point de cote 1 (fig. 18).

Dans la pratique on marque le point ω origine des abscisses naturellement s'il se trouve dans les limites de la figure; mais on marque sur l'axe uniquement la lettre représentant la cote (x) et non la lettre représentant l'abscisse du point (X).

10.14 EXEMPLES D'ABAQUES CARTÉSIENS

a) **Exemple 1.** *Soient trois nombres réels vérifiant*

(1) $$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$

Construire un abaque permettant, connaissant deux des nombres R_1, R_2, R *de trouver le troisième et ceci pour* R_1 *et* R_2 *compris entre* 1 *et* 10.

(La relation (1) se présente en Électricité lorsqu'on cherche la résistance de deux circuits montés en parallèle)

On pourrait construire les arcs des courbes représentatives C_R des fonctions

$$R_1 \mapsto R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R},$$

où R est un paramètre et R_1 la variable et ceci pour R_1 compris entre 1 et 10 : on obtient en axes rectangulaires une famille d'hyperboles équilatères; les échelles des axes sont alors des échelles métriques. Construisez ces courbes à titre d'exercice.

Si nous prenons sur les axes *deux échelles des inverses*, en posant

$$X_1 = \mu \frac{1}{R_1}, \quad X_2 = \mu \frac{1}{R_2}$$

nous obtenons

(2) $$X_1 + X_2 = \frac{\mu}{R}$$

famille de droites Δ_R dépendant du paramètre R. La figure 19 donne ces droites pour quelques valeurs de R.

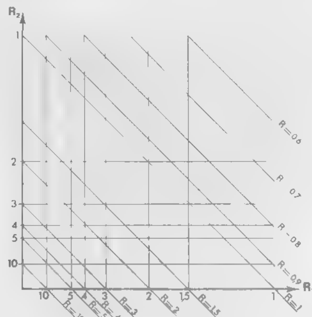


fig 19

Cet abaque permet connaissant deux des nombres R_1, R_2, R de trouver le troisième.

A l'exercice 10.111 nous indiquerons un autre moyen de représenter graphiquement la relation (1).

b) Exemple 2.

Construire l'abaque de la relation

(1) $$x = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

en prenant sur les axes des échelles logarithmiques.

On prendra $10 \leqslant t \leqslant 100$ (en secondes) et $100 \leqslant x \leqslant 1\,000$ (en mètres).

La relation (1) nous donne pour $\gamma > 0$

(2) $$\log x = 2 \log t + \log \frac{\gamma}{2}.$$

Si les échelles logarithmiques des axes ont toutes deux 125 mm on aura

$$X = \mu \log x \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{125}{\log 100 - \log 10} = 125,$$

$$T = \mu' \log t \quad \text{avec} \quad \mu' = \frac{125}{\log 1000 - \log 100} = 125;$$

la relation (2) devient donc

(3) $$X = 2\,T + \log \frac{\gamma}{2}.$$

L'abaque obtenu est constitué des *droites* D_γ de coefficient directeur 2.

Remarquons que le point de cote $t = 10$ sur l'axe des abscisses n'est pas l'origine de l'échelle logarithmique des temps, de même le point de cote $x = 100$ de l'axe des ordonnées n'est pas l'origine de l'échelle logarithmique des espaces (fig. 20)

Pour quelques valeurs de γ allant de 0,1 à 10 (en m s²) nous cherchons les cotes d'un point de chaque droite D_γ à l'aide de la formule $x = \frac{1}{2}\gamma t^2$

Pour $t = 100$

γ	0,1	0,2
x	500	1000

pour $t = 40$

γ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
x	240	320	400	480	560	640	720	800

pour $t = 10$

γ	2	3	4	5	10
x	100	150	200	250	500

Nous obtenons ainsi l'abaque de la figure 20.

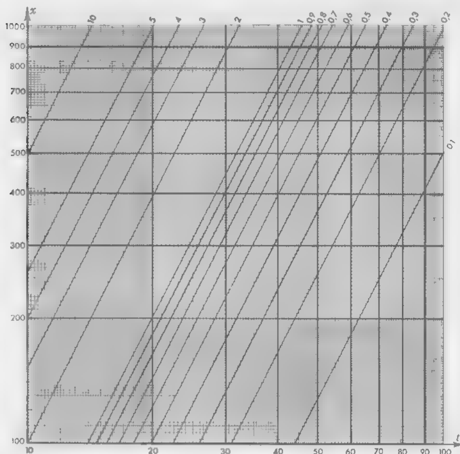


fig 20

Cet abaque une fois construit nous permet de résoudre de multiples questions relatives à un point animé d'un mouvement uniformément accéléré (dans le cas où $v = 0$ pour $t = 0$) :

Étant donné deux des nombres t, x, γ nous pourrons lire, avec une certaine approximation, le troisième sur l'abaque, par exemple

si $t = 60$ et $x = 1\,000$ on lit $\gamma \simeq 5,5$,

si $t = 30$ et $\gamma = 1$ on lit $x \simeq 450$,

si $x = 800$ et $\gamma = 5$ on lit $t \simeq 18$ etc.

c) **Généralisation.**

Considérons une relation entre trois variables réelles x, y, z de la forme

(1) $$f(x) + g(y) + h(z) = 0$$

où f, g, h sont trois fonctions numériques d'une variable réelle.
Si l'on considère (x, y) comme le couple des coordonnées d'un point m du plan rapporté à un système d'axes munis d'*échelles métriques* et z comme un paramètre réel, la relation (1) est une condition nécessaire et suffisante pour que $m(x, y)$ appartienne à une courbe C_z.

Munissons l'axe des abscisses d'une *échelle fonctionnelle* relative à la fonction f et l'axe des ordonnées d'une *échelle fonctionnelle* relative à la fonction g; pour un point M de ce graphique (fig 21) nous aurons

$$X = \overline{\omega H} = \mu f(x),$$
$$Y = \overline{\omega K} = \mu' g(y);$$

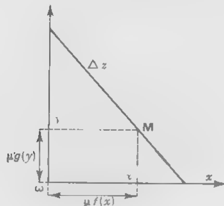


fig 21

les modules μ et μ' des deux échelles seront calculés compte tenu des dimensions que l'on veut donner au graphique et des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ où se trouvent respectivement x et y.
La relation (1) devient

(2) $$\frac{1}{\mu} X + \frac{1}{\mu'} Y + h(z) = 0.$$

Cette relation (2) représente une famille de droites parallèles Δ_z dépendant du paramètre z; ces droites sont les transformées par anamorphose des courbes C_z.
En construisant ces droites pour un certain nombre des valeurs de z on obtiendra un abaque permettant d'effectuer graphiquement des calculs sur la relation (1).

REMARQUE

Dans l'étude d'une relation au moyen d'un abaque il y a deux phases :
a) La relation étant donnée, on *construit* l'abaque; comme nous l'avons vu à l'exemple 2 ci-dessus il faut alors faire des calculs

b) L'abaque étant construit, il est *utilisé* pour trouver des résultats numériques graphiquement.
Autrement dit, comme une table de fonction, un abaque constitue un réservoir de résultats numériques, il peut très bien arriver d'ailleurs que les personnes qui utilisent l'abaque soient distinctes des personnes qui l'ont construit.

Tous les abaques que nous avons considérés jusqu'à maintenant utilisent les coordonnées cartésiennes *d'un point, c'est pour cela qu'ils sont appelés* **abaques cartésiens.** *On considère en Nomographie beaucoup d'autres espèces d'abaques, nous allons donner maintenant un exemple d'abaque non cartésien*

10. 15 ABAQUES A POINTS ALIGNÉS

a) **Introduction.**

Dans un plan rapporté à un système d'axes quelconques Ou, Ov considérons trois axes ω_1x_1, ω_2x_2, ω_3x_3 parallèles à Ov, les points ω_1, ω_2, ω_3 étant sur l'axe Ou.
Soient trois points M_1, M_2, M_3 situés respectivement sur les axes ω_1x_1, ω_2x_2, ω_3x_3 (fig. 22); ces points M_1, M_2, M_3 sont alignés sur une droite Δ si et seulement si les droites (M_1M_2) et (M_1M_3) ont même coefficient directeur, c'est-à-dire si et seulement si

$$\frac{\overline{\omega_2M_2} - \overline{\omega_1M_1}}{\overline{O\omega_2} - \overline{O\omega_1}} = \frac{\overline{\omega_3M_3} - \overline{\omega_1M_1}}{\overline{O\omega_3} - \overline{O\omega_1}},$$

ou encore (car $\overline{O\omega_2} - \overline{O\omega_1} = \overline{\omega_1\omega_2}$ et $\overline{O\omega_3} - \overline{O\omega_1} = \overline{\omega_1\omega_3}$),

$$\overline{\omega_1\omega_2}\,(\overline{\omega_3M_3} - \overline{\omega_1M_1}) - \overline{\omega_1\omega_3}\,(\overline{\omega_2M_2} - \overline{\omega_1M_1}) = 0,$$

c'est-à-dire

(1) $$\overline{\omega_2\omega_3} \cdot \overline{\omega_1M_1} + \overline{\omega_3\omega_1} \cdot \overline{\omega_2M_2} + \overline{\omega_1\omega_2} \cdot \overline{\omega_3M_3} = 0,$$

car le coefficient de $\overline{\omega_1M_1}$ est $-\overline{\omega_1\omega_2} + \overline{\omega_1\omega_3} = \overline{\omega_2\omega_1} + \overline{\omega_1\omega_3} = \overline{\omega_2\omega_3}$.
Donc M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si la relation (1) est vérifiée.

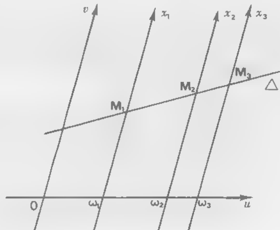


fig. 22

b) Représentation de la relation $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

Dans cette relation x_1, x_2, x_3 représentent trois variables réelles et a_1, a_2, a_3 trois constantes réelles.

Munissons les axes ω_1x_1, ω_2x_2, ω_3x_3 de trois échelles métriques de modules respectifs μ_1, μ_2 μ_3, et désignons par M_1, M_2, M_3 les points de chacun de ces axes de cotes respectives x_1, x_2, x_3 nous avons

$$\overline{\omega_1 M_1} = \mu_1 x_1, \quad \overline{\omega_2 M_2} = \mu_2 x_2, \quad \overline{\omega_3 M_3} = \mu_3 x_3$$

D'après la relation (1) ces points seront alignés si et seulement si on a

(2) $$\mu_1 \overline{\omega_2\omega_3}\, x_1 + \mu_2 \overline{\omega_3\omega_1}\, x_2 + \mu_3 \overline{\omega_1\omega_2}\, x_3 = 0.$$

Donc les points de cotes respectives x_1, x_2, x_3 vérifiant la relation $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ seront alignés si et seulement si

(3) $$\frac{\mu_1 \overline{\omega_2\omega_3}}{a_1} = \frac{\mu_2 \overline{\omega_3\omega_1}}{a_2} = \frac{\mu_3 \overline{\omega_1\omega_2}}{a_3}.$$

Ces deux relations permettent de choisir μ_1, μ_2, μ_3 et les points ω_1, ω_2, ω_3; remarquons cependant que les trois modules ne sont pas indépendants; les relations (3) nous donnent

$$\frac{\overline{\omega_2\omega_3}}{\left(\frac{a_1}{\mu_1}\right)} = \frac{\overline{\omega_3\omega_1}}{\left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)} = \frac{\overline{\omega_1\omega_2}}{\left(\frac{a_3}{\mu_3}\right)} = \frac{\overline{\omega_2\omega_1}}{\left(\frac{a_1}{\mu_1} + \frac{a_2}{\mu_2}\right)}$$

on a donc

(4) $$\frac{a_1}{\mu_1} + \frac{a_2}{\mu_2} + \frac{a_3}{\mu_3} = 0$$

Par exemple on choisira μ_1 et μ_2 suivant les intervalles où, dans la question étudiée, se trouvent x_1 et x_2; la formule (4) nous donnera μ_3 et la première des relations (3) la valeur de $\frac{\overline{\omega_3\omega_1}}{\overline{\omega_3\omega_2}}$.

L'abaque ainsi construit est tel que les points de *cotes* respectives x_1, x_2, x_3 sur chacun de leurs axes sont alignés si et seulement si la relation $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ est vérifiée; d'où le nom d'**abaque à points alignés** donné à un tel abaque.

EXEMPLE

Construire l'abaque à points alignés de la relation $3\,x_1 + 5\,x_3 - 2\,x_2 = 0$.
Prenons pour simplifier $\mu_1 = \mu_2$; la relation (4) nous donne $\mu_1 = \mu_2 = 4\,\mu_3$ et la première des relations (3)

$$\frac{\overline{\omega_3\,\omega_1}}{\overline{\omega_3\,\omega_2}} = \frac{5}{3},$$

on obtient ainsi la figure 23.

En traçant la droite joignant les points $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$ on trouve $x_3 = 10{,}5$; en traçant la droite joignant $x_1 = 2{,}5$ et $x_3 = 6$ on trouve $x_2 = 0{,}9$ etc.

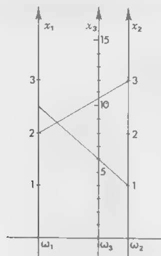


fig. 23

c) Représentation de la relation $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) = 0$

Dans cette relation f_1, f_2, f_3 représentent trois fonctions numériques d'une variable réelle.

Munissons les axes ω_1x_1, ω_2x_2, ω_3x_3 de trois *échelles fonctionnelles* relatives respectivement aux fonctions f_1, f_2, f_3, nous avons

$$\overline{\omega_1 M_1} = \mu_1 f_1(x_1), \quad \overline{\omega_2 M_2} = \mu_2 f_2(x_2), \quad \overline{\omega_3 M_3} = \mu_3 f_3(x_3).$$

D'après la relation (1) les points M_1, M_2, M_3 de cotes respectives x_1, x_2, x_3 sur ces échelles seront alignés si et seulement si on a

(5) $$\mu_1 \overline{\omega_2\omega_3}\, f_1(x_1) + \mu_2 \overline{\omega_3\omega_1}\, f_2(x_2) + \mu_3 \overline{\omega_1\omega_2}\, f_3(x_3) = 0$$

Donc les points M_1, M_2, M_3 de cotes respectives x_1, x_2, x_3 vérifiant

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) = 0$$

seront alignés si et seulement si on a

(6) $$\mu_1 \overline{\omega_2\omega_3} = \mu_2 \overline{\omega_3\omega_1} = \mu_3 \overline{\omega_1\omega_2}.$$

Ces relations (6) permettront de choisir les modules μ_1, μ_2, μ_3 des trois échelles et les points ω_1, ω_2, ω_3.

On a ainsi construit un *abaque à points alignés* représentant la relation

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) = 0.$$

EXERCICES

Calculs approchés (encadrement, incertitude) : 1 à 12.
Interpolation linéaire : 13 à 25.
Règle à calcul : 26 à 75.

Pour les élèves de Première E :
Calculs logarithmiques : 76 à 103.
Construction et utilisation d'abaques : 104 à 112.

Étant donné x et y par les encadrements $x_1 < x < x_2$ et $y_1 < y < y_2$, donner les encadrements associés $s_1 < s < s_2$ et $p_1 < p < p_2$ pour $s = x + y$ et $p = xy$. Quelle est l'incertitude lorsqu'on prend s_1 (resp. p_1) ou s_2 (resp. p_2) pour valeur approchée de s (resp. p)? lorsqu'on prend $\frac{s_1 + s_2}{2}$ $\left(\text{resp. } \frac{p_1 + p_2}{2}\right)$? (exercices 1 à 3).

10.1 $x_1 = 7{,}5$, $x_2 = 7{,}7$, $y_1 = 13{,}28$, $y_2 = 13{,}29$

10.2 $x_1 = 0{,}141$, $x_2 = 0{,}142$, $y_1 = 9{,}02$, $y_2 = 9{,}04$.

10.3 $x_1 = 1{,}70$, $x_2 = 1{,}83$, $y_1 = -0{,}025$, $y_2 = -0{,}019$.

10.4 En utilisant les développements décimaux $\pi = 3{,}14159...$ et $\sqrt{3} = 1{,}7320...$ trouver un encadrement $a < \pi\sqrt{3} < b$ tel que $b - a$ soit le plus proche possible de 5×10^{-3}.

On donne les valeurs approchées par défaut x_1, y_1, z_1 de x, y, z à 10^{-p} près; calculer un encadrement pour $2x - y + 3z$ et l'incertitude lorsqu'on prend pour valeur approchée de $2x - y + 3z$ l'une des bornes de l'intervalle d'encadrement (exercices 5 à 7).

10.5 $p = 3$, $x_1 = 8{,}05$, $y_1 = 1{,}40$, $z_1 = 0{,}29$.

10.6 $p = 5$, $x_1 = 0{,}14161$, $y_1 = 1{,}00831$, $z_1 = 0{,}98976$.

10.7 $p = 4$, $x_1 = 0{,}0417$, $y_1 = 1{,}2870$, $z_1 = 0{,}9050$.

Étant donné x et y par les encadrements $x_1 < x < x_2$ et $y_1 < y < y_2$ donner l'encadrement associé $q_1 < q < q_2$ pour $q = \frac{x}{y}$. Quelle est l'incertitude si on prend q_1 (ou q_2) pour valeur approchée de q ? lorsqu'on prend $\frac{q_1 + q_2}{2}$? (exercices 8 à 10).

10.8 $x_1 = 5{,}28$, $x_2 = 5{,}41$, $y_1 = -1{,}47$, $y_2 = -1{,}48$

10.9 $x_1 = 0{,}49$, $x_2 = 0{,}50$, $y_1 = 0{,}03$, $y_2 = 0{,}05$.

10.10 $x_1 = 4{,}7$, $x_2 = 4{,}8$, $y_1 = 9{,}1$, $y_2 = 10{,}3$

10.11* On donne la valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de $\sqrt{3}$, $a = 1{,}732$ et la valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de $\sqrt{5}$, $b = 2{,}449$. Donner une valeur approchée par défaut de $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ à 10^{-p} près, p étant le plus grand possible.

10.12 Calculer à l'aide de la table 1 les nombres $(1{,}23)^3$ et $(187)^2$, puis comparer les résultats avec ceux que l'on obtiendrait en utilisant la table 2.

Calculer les valeurs approchées des nombres suivants par interpolation linéaire (exercices 13 à 25).

10.13 $(5{,}14)^3$ $(0{,}417)^3$, $(78{,}1)^3$ (table 1).

10.14 $(381{,}7)^2$, $(18{,}03)^2$, $(253{,}4)^2$ (table 2)

10.15 $\sqrt{18{,}2}$, $\sqrt{73212}$, $\sqrt{2174{,}35}$ (table 2).

10.16 $\sqrt{217{,}435}$, $\sqrt{73{,}4}$, $\sqrt{38000}$ (table 2).

10.17 $\sqrt[3]{53{,}4}$, $\sqrt[3]{2712}$, $\sqrt[3]{487{,}17}$ (table 1).

10.18 sin 18°12′, sin 27°51′, sin 85°3′ (table 4).

10.19 cos 23°42′, cos 73°10′, cos 35°18′ (table 4).

10.20 tg 41°27′, tg 78°35′, tg 17°49′ (table 4)

10.21 cotg 36°11′, cotg 63°4′, cotg 56°24′ (table 4).

10.22 cos 35,18 gr, cos 73,11 gr, cos 50,87 gr (table 3).

10.23 sin 41,08 gr, sin 20,09 gr, sin 79,37 gr (table 3).

10.24 tg 47,39 gr, tg 18,09 gr, tg 14,73 gr (table 3).

10.25 cotg 86,13 gr, cotg 54,48 gr, cotg 7,93 gr (table 3).

Vérifier à l'aide de la règle à calcul les résultats approchés suivants (ex. 26 à 75).

10.26 $0{,}329 \times 51 = 1{,}68 \times 10$.

10.27 $4{,}18 \times 1{,}66 = 6{,}95$.

10.28 $18{,}15 \times 0{,}124 = 2{,}25$.

10.29 $442 \times 0{,}00672 = 2{,}97$.

10.30 $0{,}241 \times 0{,}1625 = 3{,}92 \times 10^{-2}$.

10.31 $64{,}5 \times 0{,}00643 = 4{,}15 \times 10^{-1}$.

10.32 $0{,}333 \times 0{,}201 = 6{,}7 \times 10^{-2}$.

10.33 $43{,}3 \times 0{,}202 = 8{,}75$.

10.34 $9{,}83 \times 0{,}0238 = 2{,}34 \times 10^{-1}$.

10.35 $0{,}257 \times 22{,}2 = 5{,}70$.

10.36 $0{,}297 : 1{,}25 = 2{,}38 \times 10^{-1}$.

10.37 $32{,}6 \cdot 0{,}683 = 4{,}77 \times 10$.

10.38 $254 : 2{,}78 = 9{,}13 \times 10$.

10.39 $0{,}0675 : 3{,}89 = 1{,}735 \times 10^{-2}$.

10.40 $8020 : 0{,}233 = 3{,}44 \times 10^4$.

10.41 $1{,}219 : 251 = 4{,}86 \times 10^{-3}$.

10.42 $32{,}50 : 487 = 6{,}68 \times 10^{-2}$.

10.43 $5{,}37 : 7{,}35 = 7{,}31 \times 10^{-1}$.

10.44 $8370 : 9{,}83 = 8{,}51 \times 10^2$.

10.45 $1{,}305 : 246 = 5{,}31 \times 10^{-3}$.

10.46 $\frac{1{,}31 \times 37{,}5}{2{,}43} = 2{,}02 \times 10$

10.47 $\frac{25{,}6}{2{,}04 \times 327} = 3{,}84 \times 10^{-2}$

10.48 $\frac{4{,}73 \times 7{,}61}{73{,}2} = 4{,}92 \times 10^{-1}$.

10.49 $\frac{423}{12{,}21 \times 3{,}56} = 9{,}74$.

10.50 $\frac{63{,}5 \times 16{,}15}{231} = 4{,}44$.

10.51 $\frac{9{,}57}{854 \times 236} = 4{,}75 \times 10^{-5}$.

10.52 $\frac{78{,}5 \times 13{,}1}{243} = 4{,}23$.

10.53 $\frac{4230}{3{,}97 \times 62} = 1{,}72 \times 10$.

10.54 $\frac{0{,}212 \times 79{,}3}{18{,}4} = 9{,}15 \times 10^{-1}$.

10.55 $\frac{0{,}265}{321 \times 0{,}029} = 2{,}85 \times 10^{-2}$.

10.56 $\frac{0{,}0421 \times 0{,}635}{0{,}0347} = 7{,}71 \times 10^{-1}$.

10.57 $\frac{0{,}0582}{4{,}65 \times 0{,}25} = 5{,}01 \times 10^{-2}$.

10.58 $\frac{345}{239 \times 0{,}087} = 1{,}66 \times 10$.

10.59 $\frac{89{,}3 \times 93{,}5}{18{,}5} = 4{,}52 \times 10^2$.

10.60 $\frac{1,25}{51,4 \times 235} = 1,035 \times 10^{-4}$.

10.61 $\frac{1,212 \times 0,435}{172} = 3,07 \times 10^{-3}$.

10.62 $\frac{884}{2340 \times 11,3} = 3,34 \times 10^{-2}$.

10.63 $\frac{4,75 \times 0,375}{635} = 2,80 \times 10^{-3}$.

10.64 $\frac{9,28}{7,75 \times 8,19} = 1,46 \times 10^{-1}$.

10.65 $\frac{243 \times 0,0072}{73,5} = 2,38 \times 10^{-2}$.

10.66 $\frac{6,25 \times 0,00271}{887 \times 3,41} = 5,60 \times 10^{-6}$.

10.67 $\frac{5660 \times 4,86}{1,25 \times 65,6} = 3,35 \times 10^{2}$.

10.68 $\frac{70,4 \times 6,95}{243 \times 0,0216} = 9,33 \times 10$.

10.69 $\frac{2,21 \times 0,0653}{0,25 \times 4,86} = 1,19 \times 10^{-1}$.

10.70 $\frac{876 \times 7,06}{998 \times 2,43} = 2,55$.

10.71 $\frac{0,698 \times 1,35}{24,3 \times 0,064} = 6,06 \times 10^{-1}$.

10.72 $\frac{0,0257 \times 8,97}{8,32 \times 1,465} = 1,89 \times 10^{-2}$.

10.73 $\frac{8990 \times 763}{0,71 \times 0,0824} = 1,17 \times 10^{8}$.

10.74 $\frac{8050 \times 0,153}{2,46 \times 8,99} = 5,57 \times 10$.

10.75 $\frac{14,29 \times 0,052}{4600 \times 29,3} = 5,52 \times 10^{-6}$.

N. B. Tous les exercices suivants sont réservés aux élèves de Première E.

Calculer les logarithmes des nombres suivants (ex. 76 à 80).

10.76 a 4,013, a^2, $\frac{1}{a}$, $\sqrt{a}$, a^3, $\sqrt[3]{a}$.

10.77 $a = 18,75$, a^2, a^3, a^4, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$.

10.78 a 0,12, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$.

10.79 a 0,00378, $\sqrt{a}$, $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$.

10.80 $a = 3,1416$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$

Calculer les nombres ayant pour logarithmes les nombres suivants (exercices 81 à 83).

10.81 4,2712; $\bar{1},3124$; 0,4712.

10.82 2,1243; $\bar{2},9867$; 1,0147

10.83 $\bar{3},1724$; 0,1285; 3,7142.

Calculer, à l'aide des logarithmes les nombres suivants (exercices 84 à 93).

10.84 $17,30 \times 8,03$; $1,04 \times 43$; $6,45 \times 7340$.

10.85 $\frac{7,46}{583}$; $\frac{94,5}{0,843}$; $\frac{4350}{0,0287}$

10.86 $\frac{72,2 \times 8,19}{39}$; $\frac{201 \times 2,35}{18,3}$; $\frac{14,7}{27,5 \times 49,2}$.

10.87 $\frac{21,4 \times 0,00531}{15,3}$; $\frac{19,3}{73,8 \times 478}$; $\frac{37,5 \times 46,3}{1870 \times 0,00343}$.

10.88 $\sqrt{757}$; $\sqrt{0,185}$; $\sqrt{0,0471}$.

10.89 $(23,4)^2$, $(32,4)^2$; $(4320)^2$.

10.90. $(1,73)^3$; $(0,00439)^3$; $(2,78)^3$.

10.91 $\sqrt[3]{2,12}$; $\sqrt[3]{3,14}$; $\sqrt[3]{7,09}$.

10.92 $\frac{(30,4)^2 \times 18}{\pi}$; $\frac{\sqrt[3]{5} \times \pi^2}{\sqrt{2} \times 13,4}$; $\frac{\sqrt{3} \times \pi}{(59,4)^3}$.

10.93 $\frac{(0,018)^2 \times 53,2}{\sqrt[3]{0,00543}}$; $\frac{29,8 \times \sqrt[3]{0,0763}}{\pi^2 \times \sqrt[3]{18,5}}$; $\frac{\sqrt{\pi} \times (73,2)^2}{(915)^3 \times 0,0007}$.

10.94 On donne la formule $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ où $g = 9,81$.

Compléter le tableau suivant (par calcul logarithmique) :

l	0,58	0,62	0,66	0,70	0,74	0,78	0,82	0,86	0,90
T									

10.95 On donne la formule $V = abc$. Compléter le tableau suivant (par calcul logarithmique) :

a	2,17	4,32	28,4	19,4	0,412	4,75	8,03	975	4320
b	75,9	187	0,435	1890	7,03	0,0034	6540	34,2	2,17
c	0,93	0,154	4,18	0,0043	437	79,4	0,0701	0,435	0,403
V									

10.96 Le rayon d'un cercle en fonction de son aire est donné par $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Compléter le tableau suivant (par calcul logarithmique) :

S	18,3	19,0	19,7	20,4	21,1	21,8	22,5	23,2	23,9
R									

10.97 Le diamètre d'une sphère en fonction de son volume est donné par $d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$. Compléter le tableau suivant (par calcul logarithmique) :

V	0,037	0,041	0,045	0,049	0,053	0,057	0,061	0,065	0,069
d									

10.98 La quantité de chaleur nécessaire pour que la température d'un corps de masse *m*, de chaleur massique *c* s'élève d'une quantité Δt est donnée par $Q = m.c.\Delta t$. Compléter le tableau suivant (par calcul logarithmique) :

Corps	Plomb	Argent	Fer	Verre	Mercure	Éther
m	345	53,4	782	373	629	23,4
c	0,031	0,056	0,11	0,19	0,033	0,48
Δt	12	27,3	137	23,7	38,2	2,18
Q						

Résoudre les systèmes suivants (exercices 99 à 103).

10.99 $\begin{cases} 2 \log x - \log y = 0{,}5528 \\ \log x + 3 \log y = 3{,}2342. \end{cases}$

10.100 $\begin{cases} \log x + \log y = 1{,}1761 \\ 5x - 2y = 5. \end{cases}$

10.101 $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 3x^2 - y^2 = 275 \end{cases}$

10.102 $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x^2 + y^2 = 425 \end{cases}$

10.103 $\begin{cases} \log \sqrt{x} + \log \sqrt{y} = 0{,}7782 \\ 2 \log x - \log y = 0{,}2499. \end{cases}$

Vous pouvez vérifier les résultats approchés des exercices 10.26 à 10.75 à l'aide des logarithmes.

10.104 La relation $v = \frac{\pi}{1\,000} dn$ donne la vitesse de coupe d'un tour (en mètres par minute) en fonction du diamètre *d* (en millimètres) de la pièce à fraiser et de la vitesse de rotation *n* d'un tour (en tours par minute).
a) Construire un abaque cartésien représentant cette relation avec des échelles métriques sur l'axe des abscisses *d* ($0 \leqslant d \leqslant 200$) et l'axe des ordonnées *v* ($0 \leqslant v \leqslant 50$). On construira les droites obtenues pour $n = 10, 25, 50, 75, 100, 150, 200, 250$.
b) Construire un abaque cartésien représentant la même relation, dans les mêmes conditions, avec des échelles logarithmiques (l'échelle de 10 à 100 de log *d* sera prise égale à $\frac{125}{2}$ mm et celle de log *v* de 10 à 100 sera prise égale à 125 mm.

10.105 On considère les deux relations

$$(1) \quad x = \frac{1}{2}\gamma t^2. \qquad\qquad (2) \quad v = \gamma t.$$

a) Construire l'abaque de la relation (1), puis l'abaque de la relation (2), avec des échelles logarithmiques sur l'axe des abscisses (log *t*) et l'axe des ordonnées (log *y*) pour les valeurs utilisées à l'exemple 2 du § 10.14; *x* puis *v* étant des paramètres, on obtient des droites D_x et des droites Δ_v.
b) Construire ces deux abaques sur un même graphique. Énoncer tous les renseignements que procure le point d'intersection d'une droite D_x et d'une droite Δ_v pour *x* et *v* donnés.

10.106 On considère un ressort à boudin dont le rayon moyen d'une spire est *r* en millimètres, le diamètre du fil étant *d* millimètres. Le métal dont est fait le fil est tel que la charge maximum supportée est en kilogrammes-force

$$(1) \qquad P = 7{,}85 \frac{d^3}{r};$$

la flèche par spire est alors en millimètres

$$(2) \qquad f = 0{,}063 \frac{r^2}{d}$$

a) Construire l'abaque cartésien de la relation (1) pour $2 \leqslant d \leqslant 10$ et $10 \leqslant r \leqslant 50$ avec des échelles logarithmiques pour l'axe des abscisses (log *r*) et pour l'axe des ordonnées (log *d*), la longueur de ces échelles étant respectivement 150 mm et 100 mm.
b) Construire l'abaque cartésien de la relation (2) dans les mêmes conditions qu'en *a*).
c) Construire ces deux abaques sur un même graphique. On donne $P = 50$, $d = 5$, lire les valeurs de *r* et de *f*.

10.107 On considère la relation

$$y \quad \log kx$$

Construire l'abaque cartésien de cette relation avec une échelle logarithmique sur l'axe des abscisses ($X = \log x$) et une échelle métrique sur l'axe des ordonnées ($Y = y$). (On trouve dans le commerce un tel papier appelé papier semi-logarithmique)

Construire les abaques à points alignés (avec trois axes parallèles munis d'échelles métriques, représentant la relation donnée (ex. 108 à 110)

10.108 $3x + 5y - z = 0.$

10.109 $x + 3y - 2z = 0.$

10.110 $2x - 5y + 3z = 0.$

10.111 *a*) On considère un triangle AOB, et sa bissectrice intérieure issue de O qui coupe la droite AB en L. Démontrer que

$$\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}} = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\overline{OL}}$$

où $\widehat{AOB} = \alpha$. (Écrire que l'aire du triangle AOB est la somme des aires des triangles AOL et LOB.) $\left(\text{On utilisera la formule } \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)$
b) Déduire de la question précédente la construction d'un abaque à points alignés utilisant trois axes concourants à échelles métriques et représentant la relation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \frac{1}{z}$$

Étudier le cas particulier où $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3}$

10.112 Construire un abaque à points alignés et à axes concourants munis d'échelles métriques et représentant la relation

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_4}$$

(Utiliser l'exercice 10.111.)

TABLE 1 Carrés, cubes, racines carrées et inverses des nombres de 1 à 99

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	1	1
2	4	8	1,414 2	0,5
3	9	27	1,732 0	0,333 3
4	16	64	2	0,25
5	25	125	2,236 0	0,2
6	36	216	2,449 4	0,166 6
7	49	343	2,645 7	0,142 8
8	64	512	2,828 4	0,125
9	81	729	3	0,111 1
10	100	1 000	3,162 2	0,1
1	121	1 331	3,316 6	0,090 9
2	144	1 728	3,464 1	0,083 3
3	169	2 197	3,605 5	0,076 9
4	196	2 744	3,741 6	0,071 4
5	225	3 375	3,872 9	0,066 6
6	256	4 096	4	0,062 5
7	289	4 913	4,123 1	0,058 8
8	324	5 832	4,242 6	0,055 5
19	361	6 859	4,358 8	0,052 6
20	400	8 000	4,472 1	0,05
1	441	9 261	4,582 5	0,047 6
2	484	10 648	4,690 4	0,045 4
3	529	12 167	4,795 8	0,043 4
4	576	13 824	4,898 9	0,041 6
5	625	15 625	5	0,04
6	676	17 576	5,099 0	0,038 4
7	729	19 683	5,196 1	0,037 0
8	784	21 952	5,291 5	0,035 7
29	841	24 389	5,385 1	0,034 4
30	900	27 000	5,477 2	0,033 3
1	961	29 791	5,567 7	0,032 2
2	1 024	32 768	5,656 8	0,031 2
3	1 089	35 937	5,744 5	0,030 3
4	1 156	39 304	5,840 9	0,029 4
5	1 225	42 875	5,916 0	0,028 5
6	1 296	46 656	6	0,027 7
7	1 369	50 653	6,082 7	0,027 0
8	1 444	54 872	6,164 4	0,026 3
39	1 521	59 319	6,244 9	0,025 6
40	1 600	64 000	6,324 5	0,025
1	1 681	68 921	6,403 1	0,024 3
2	1 764	74 088	6,480 7	0,023 8
3	1 849	79 507	6,557 4	0,023 2
4	1 936	85 184	6,633 2	0,022 7
5	2 025	91 125	6,708 2	0,022 2
6	2 116	97 336	6,782 3	0,021 7
7	2 209	103 823	6,855 6	0,021 2
8	2 304	110 592	6,928 2	0,020 8
49	2 401	117 649	7	0,020 4
50	2 500	125 000	7,071 0	0,02
1	2 601	132 651	7,141 4	0,019 6
2	2 704	140 608	7,211 1	0,019 2
3	2 809	148 877	7,280 1	0,018 8
4	2 916	157 464	7,348 4	0,018 5
5	3 025	166 375	7,416 1	0,018 1
6	3 136	175 616	7,483 3	0,017 8
7	3 249	185 193	7,549 8	0,017 5
8	3 364	195 112	7,615 7	0,017 2
59	3 481	205 379	7,681 1	0,016 9
60	3 600	216 000	7,745 9	0,016 6
1	3 721	226 981	7,810 2	0,016 3
2	3 844	238 328	7,874 0	0,016 1
3	3 969	250 047	7,937 2	0,015 8
4	4 096	262 144	8	0,015 6
5	4 225	274 625	8,062 2	0,015 3
6	4 356	287 496	8,124 0	0,015 1
7	4 489	300 763	8,185 3	0,014 9
8	4 624	314 432	8,246 2	0,014 7
69	4 761	328 509	8,306 6	0,014 4
70	4 900	343 000	8,366 6	0,014 2
1	5 041	357 911	8,426 1	0,014 0
2	5 184	373 248	8,485 2	0,013 8
3	5 329	389 017	8,544 0	0,013 7
4	5 476	405 224	8,602 3	0,013 5
5	5 625	421 875	8,660 2	0,013 3
6	5 776	438 976	8,717 7	0,013 1
7	5 929	456 533	8,774 9	0,012 9
8	6 084	474 552	8,831 7	0,012 8
79	6 241	493 039	8,888 1	0,012 6
80	6 400	512 000	8,944 2	0,012 5
1	6 561	531 441	9	0,012 3
2	6 724	551 368	9,055 3	0,012 2
3	6 889	571 787	9,110 4	0,012 0
4	7 056	592 704	9,165 1	0,011 9
5	7 225	614 125	9,219 5	0,011 7
6	7 396	636 056	9,273 6	0,011 6
7	7 569	658 503	9,327 3	0,011 4
8	7 744	681 472	9,380 8	0,011 3
89	7 921	704 969	9,433 9	0,011 2
90	8 100	729 000	9,486 8	0,011 1
1	8 281	753 571	9,539 3	0,010 9
2	8 464	778 688	9,591 6	0,010 8
3	8 649	804 357	9,643 6	0,010 7
4	8 836	830 584	9,695 3	0,010 6
5	9 025	857 375	9,746 7	0,010 5
6	9 216	884 736	9,797 9	0,100 4
7	9 409	912 673	9,848 8	0,100 3
8	9 604	941 192	9,899 4	0,010 2
99	9 801	970 299	9,949 8	0,010 1

N.B. Les valeurs de $\sqrt{n}$ et $\frac{1}{n}$ sont des valeurs approchées par défaut à 10^{-4} près.

TABLE 2. Carrés des nombres de 100 à 499

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	10 000	10 201	10 404	10 609	10 816	11 025	11 236	11 449	11 664	11 881
11	12 100	12 321	12 544	12 769	12 996	13 225	13 456	13 689	13 924	14 161
12	14 400	14 641	14 884	15 129	15 376	15 625	15 876	16 129	16 384	16 641
13	16 900	17 161	17 424	17 689	17 956	18 225	18 496	18 769	19 044	19 321
14	19 600	19 881	20 164	20 449	20 736	21 025	21 316	21 609	21 904	22 201
15	22 500	22 801	23 104	23 409	23 716	24 025	24 336	24 649	24 964	25 281
16	25 600	25 921	26 244	26 569	26 896	27 225	27 556	27 889	28 224	28 561
17	28 900	29 241	29 584	29 929	30 276	30 625	30 976	31 329	31 684	32 041
18	32 400	32 761	33 124	33 489	33 856	34 225	34 596	34 969	35 344	35 721
19	36 100	36 481	36 864	37 249	37 636	38 025	38 416	38 809	39 204	39 601
20	40 000	40 401	40 804	41 209	41 616	42 025	42 436	42 849	43 264	43 681
21	44 100	44 521	44 944	45 369	45 796	46 225	46 656	47 089	47 524	47 961
22	48 400	48 841	49 284	49 729	50 176	50 625	51 076	51 529	51 984	52 441
23	52 900	53 361	53 824	54 289	54 756	55 225	55 696	56 169	56 644	57 121
24	57 600	58 081	58 564	59 049	59 536	60 025	60 516	61 009	61 504	62 001
25	62 500	63 001	64 504	64 009	64 516	65 025	65 536	66 049	66 564	67 081
26	67 600	68 121	68 644	69 169	69 696	70 225	70 756	71 289	71 824	72 361
27	72 900	73 441	73 984	74 529	75 076	75 625	76 176	76 729	77 284	77 841
28	78 400	78 961	79 524	80 089	80 656	81 225	81 796	82 369	82 944	83 521
29	84 100	84 681	85 264	85 849	86 436	87 025	87 616	88 209	88 804	89 401
30	90 000	90 601	91 204	91 809	92 416	93 025	93 636	94 249	94 864	95 481
31	96 100	96 721	97 344	97 969	98 596	99 225	99 856	100 489	101 124	101 761
32	102 400	103 041	103 684	104 329	104 976	105 625	106 276	106 929	107 584	108 241
33	108 900	109 561	110 224	110 889	111 556	112 225	112 896	113 569	114 244	114 921
34	115 600	116 281	116 964	117 649	118 336	119 025	119 716	120 409	121 104	121 801
35	122 500	123 201	123 904	124 609	125 316	126 025	126 736	127 449	128 164	128 881
36	129 600	130 321	131 044	131 769	132 496	133 225	133 956	134 689	135 424	136 161
37	136 900	137 641	138 384	139 129	139 876	140 625	141 376	142 129	142 884	143 641
38	144 400	145 161	145 924	146 689	147 456	148 225	148 996	149 769	150 544	151 321
39	152 100	152 881	153 664	154 449	155 436	156 025	156 816	157 609	158 404	159 201
40	160 000	160 801	161 604	162 409	163 216	164 025	164 836	165 649	166 464	167 281
41	168 100	168 921	169 744	170 569	171 396	172 225	173 056	173 889	174 724	175 561
42	176 400	177 241	178 084	178 929	179 776	180 625	181 476	182 329	183 184	184 041
43	184 900	185 761	186 624	187 489	188 356	189 225	190 096	190 969	191 844	192 721
44	193 600	194 481	195 364	196 249	197 136	198 025	198 916	199 809	200 704	201 601
45	202 500	203 401	204 304	205 209	206 116	207 025	207 936	208 849	209 764	210 681
46	211 600	212 521	214 344	214 369	215 296	216 225	217 156	218 089	219 024	219 961
47	220 900	221 841	222 784	223 729	224 676	225 625	226 576	227 529	228 484	229 441
48	230 400	231 361	232 324	233 389	234 256	235 225	236 196	237 169	238 144	239 121
49	240 100	241 081	242 064	243 049	244 036	245 025	246 016	247 009	248 004	249 001

N. B. La première colonne donne le nombre des dizaines de *n*, le chiffre des unités de *n* se lit sur la première ligne.

Exemple 1 : $n = 283$, à l'intersection de la ligne de 28 et de la colonne 3 on lit $n^2 = 80\,089$.

Exemple 2 : $n = 328$, à l'intersection de la ligne de 32 et de la colonne de 8 on lit n^2 107 584.

TABLE 3

Table trigonométrique de grade en grade

Grades	Sinus	Tangentes	Cotangentes	Cosinus	
1	0,0157	0,0157	63,6567	0,9999	99
2	0,0314	0,0314	31,8205	0,9995	98
3	0,0471	0,0472	21,2049	0,9989	97
4	0,0628	0,0629	15,8945	0,9980	96
5	0,0785	0,0787	12,7062	0,9969	95
6	0,0941	0,0945	10,5789	0,9956	94
7	0,1097	0,1104	9,0579	0,9940	93
8	0,1253	0,1263	7,9158	0,9921	92
9	0,1409	0,1423	7,0264	0,9900	91
10	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	90
11	0,1719	0,1745	5,7297	0,9851	89
12	0,1874	0,1908	5,2422	0,9823	88
13	0,2028	0,2071	4,8288	0,9792	87
14	0,2181	0,2235	4,4737	0,9759	86
15	0,2334	0,2401	4,1653	0,9724	85
16	0,2487	0,2568	3,8947	0,9686	84
17	0,2639	0,2736	3,6554	0,9646	83
18	0,2790	0,2905	3,4420	0,9603	82
19	0,2940	0,3076	3,2506	0,9558	81
20	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	80
21	0,3239	0,3424	2,9208	0,9461	79
22	0,3387	0,3600	2,7776	0,9409	78
23	0,3535	0,3779	2,6464	0,9354	77
24	0,3681	0,3959	2,5257	0,9298	76
25	0,3827	0,4142	2,4142	0,9239	75
26	0,3971	0,4327	2,3109	0,9178	74
27	0,4115	0,4515	2,2148	0,9114	73
28	0,4258	0,4706	2,1251	0,9048	72
29	0,4399	0,4899	2,0413	0,8980	71
30	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	70
31	0,4679	0,5295	1,8887	0,8838	69
32	0,4818	0,5498	1,8190	0,8763	68
33	0,4955	0,5704	1,7532	0,8686	67
34	0,5090	0,5914	1,6909	0,8607	66
35	0,5225	0,6128	1,6319	0,8526	65
36	0,5358	0,6346	1,5757	0,8443	64
37	0,5490	0,6569	1,5224	0,8358	63
38	0,5621	0,6796	1,4715	0,8271	62
39	0,5750	0,7028	1,4229	0,8181	61
40	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	60
41	0,6004	0,7508	1,3319	0,7997	59
42	0,6129	0,7757	1,2892	0,7902	58
43	0,6252	0,8012	1,2482	0,7804	57
44	0,6374	0,8273	1,2088	0,7705	56
45	0,6494	0,8541	1,1709	0,7604	55
46	0,6613	0,8816	1,1343	0,7501	54
47	0,6730	0,9099	1,0990	0,7396	53
48	0,6845	0,9391	1,0649	0,7290	52
49	0,6959	0,9691	1,0319	0,7181	51
50	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	50
	Cosinus	Cotangentes	Tangentes	Sinus	Grades

TABLE 4

Table trigonométrique de degré en degré

Degrés	Sinus	Tangentes	Cotangentes	Cosinus	
1	0,0175	0,0175	57,2900	0,9999	89
2	0,0349	0,0349	28,6363	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,0811	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,3007	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,4301	0,9962	85
6	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	9,1443	0,9925	83
8	0,1392	0,1405	7,1154	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	81
10	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	80
11	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	76
15	0,2588	0,2679	3,7321	0,9659	75
16	0,2756	0,2867	3,4874	0,9613	74
17	0,2924	0,3057	3,2709	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	72
19	0,3256	0,3443	2,9042	0,9455	71
20	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	70
21	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	65
26	0,4384	0,4877	2,0503	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	63
28	0,4695	0,5317	1,8807	0,8829	62
29	0,4848	0,5543	1,8040	0,8746	61
30	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	60
31	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	52
39	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	51
40	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	50
41	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	47
44	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	46
45	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	45
	Cosinus	Cotangentes	Tangentes	Sinus	Degrés

TABLE 5. Logarithmes décimaux des nombres entiers de 100 à 1 000

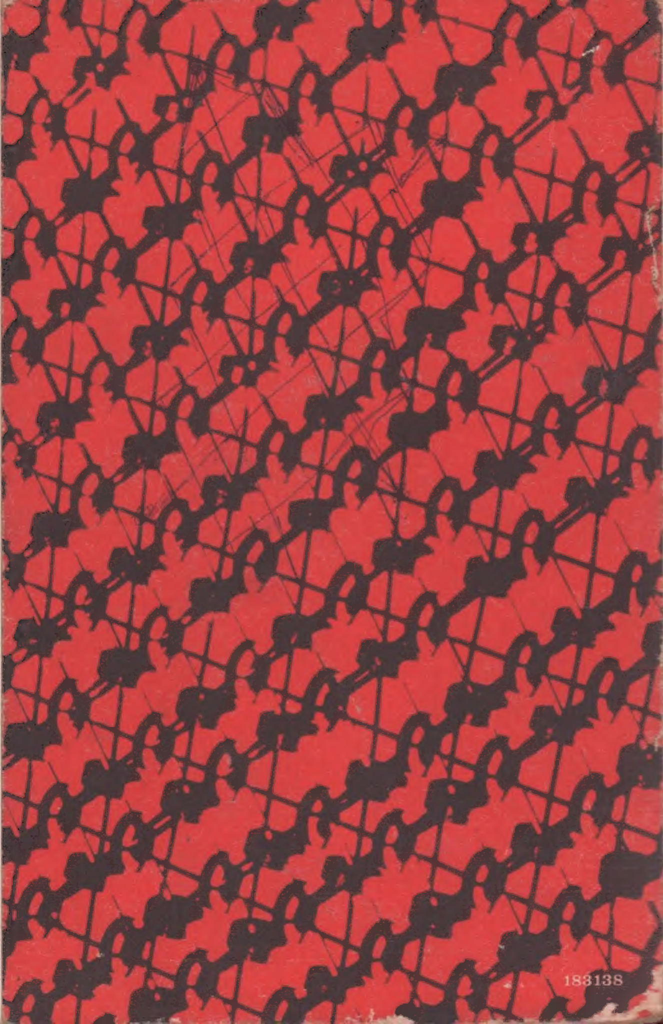
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0 000	0 043	0 086	0 128	0 170	0 212	0 253	0 294	0 334	0 374
1	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755
2	792	828	864	899	934	969	004*	038*	072*	106*
3	1 139	1 173	1 206	1 239	1 271	1 303	1 335	1 367	1 399	1 430
4	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732
5	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*
6	2 041	2 068	2 095	2 122	2 148	2 175	2 201	2 227	2 253	2 279
7	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529
8	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765
9	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989
20	3 010	3 032	3 054	3 075	3 096	3 118	3 139	3 160	3 181	3 201
1	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404
2	424	444	464	483	502	522	541	560	579	589
3	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784
4	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962
5	979	997	014*	031*	048*	065*	082*	099*	116*	133*
6	4 150	4 166	4 183	4 200	4 216	4 232	4 249	4 265	4 281	4 298
7	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456
8	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609
9	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757
30	4 771	786	800	814	829	843	857	871	886	900
1	914	928	942	955	969	983	997	011*	024*	038*
2	5 051	5 065	5 079	5 092	5 105	5 119	5 132	5 145	5 159	5 172
3	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302
4	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428
5	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551
6	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670
7	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786
8	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899
9	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*
40	6 021	6 031	6 042	6 053	6 064	6 075	6 085	6 096	6 107	6 117
1	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222
2	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325
3	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425
4	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522
5	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618
6	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712
7	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803
8	812	821	830	839	848	857	866	875	884	983
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981

N. B. Si le premier chiffre de la mantisse n'est pas écrit, il est à lire : dans la première ligne antérieure où il est écrit s'il n'y a pas d'étoile, dans la ligne suivante s'il y a une étoile.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6 990	6 998	7 007	7 016	7 024	7 033	7 042	7 050	7 059	7 067
1	7 076	7 084	7 093	7 101	7 110	7 118	7 126	7 135	7 143	7 152
2	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235
3	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
4	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396
5	404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
6	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
7	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
8	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
9	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
60	7 782	7 789	7 796	7 803	7 810	7 818	7 825	7 832	7 839	7 846
1	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
2	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
3	993	000*	007*	014*	021*	028*	035*	041*	048*	055*
4	8 062	8 069	8 075	8 082	8 089	8 096	8 102	8 109	8 116	8 122
5	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
6	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
7	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
8	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
9	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
70	8 451	8 457	8 463	8 470	8 476	8 482	8 488	8 494	8 500	8 506
1	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
2	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
3	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
4	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
5	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
6	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
7	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
8	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
9	976	982	987	993	998	004*	009*	015*	020*	025*
80	9 031	9 036	9 042	9 047	9 053	9 058	9 063	9 069	9 074	9 079
1	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
2	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
3	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
4	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
5	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
6	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
7	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
8	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
9	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
90	9 542	9 547	9 552	9 557	9 562	9 566	9 571	9 576	9 581	9 586
1	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
2	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
3	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
4	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
5	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
6	823	827	832	836	841	845	850	854	859	683
7	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
8	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

Table des matières

Imprimé en France
IMPRIMERIE FIRMIN-DIDOT. - PARIS - MESNIL - IVRY — N° 6974
Dépôt légal : 1er trimestre 1971
N° d'éditeur C. 15206 - VII (PF. c. VII)


183138